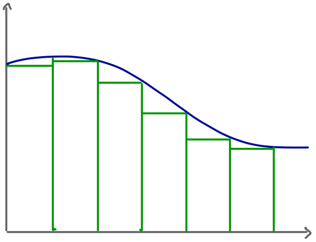
Def.: Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum.

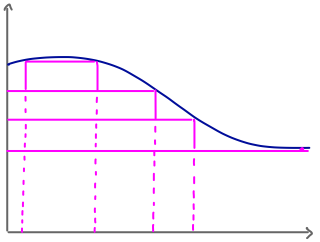
- Für eine meßbare Funktion $f: \Omega \to [0,\infty]$ mit $F(t) := \mu\left(\{x \in \Omega \mid f(x) > t\}\right)$ heißt

$$\boxed{\int_\Omega f \, d\mu := \int_\Omega f(x)\, \mu(dx) := \int_0^\infty F(t)\, dt}$$

Lebesgue-Integral & f Lebesgue integrierbar falls $\int_\Omega f\, d\mu < \infty$.



Riemann-Integral: Unterteilung im Def. bereich



Lebesgue-Integral: Unterteilung im Wertebereich

- Ist $f: \Omega \to \mathbb{C}$ meßbar, dann ist das Lebesgue-Integral definiert als

$$\int_\Omega f\, d\mu := \int_\Omega (\operatorname{Re} f)_+ \, d\mu - \int_\Omega (\operatorname{Re} f)_- \, d\mu + i \int_\Omega (\operatorname{Im} f)_+ \, d\mu - i \int_\Omega (\operatorname{Im} f)_- \, d\mu$$

wobei $(\dots)_+$ und $(\dots)_-$ den pos. bzw. neg. Anteil bezeichnen und jeweils nicht beide ∞ sein dürfen.

- $f: \Omega \to \mathbb{C}$ heißt integrierbar (= absolut Lebesgue integrierbar), wenn $\int_\Omega |f|\, d\mu < \infty$.
- Ist $A \in \Omega$ meßbar, dann definieren wir $\int_A f\, d\mu := \int_\Omega \chi_A(x) f(x)\, \mu(dx)$, $\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0 \end{cases}$

Bem.:

- F existiert wegen Meßbarkeit und das Riemann-Integral $\int_0^\infty F(t)\, dt \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ wegen Monotonie von F.
- Ist $f = g$ fast überall, dann gilt $\int_\Omega f\, d\mu = \int_\Omega g\, d\mu$
- Andere gebräuchliche Schreibweisen für $\int_\Omega f\, d\mu$ sind: $\int_\Omega f$ oder $\int_\Omega f(x)\, d\mu(x)$

- Ist $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ (unstig.) absolut Riemann integrierbar, dann gilt:

$$\boxed{\text{Riemann-Integral} = \text{Lebesgue-Integral}}$$

mit $\Omega = \mathbb{R}^n$, $\Sigma = \mathcal{B}$, $\mu =$ Lebesgue-Maß. Im Folgenden meint daher $\int_\Omega f(x)\,dx := \int_\Omega f(x)\,\mu(dx)$ stets das Lebesgue-Integral.

- Ist $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$, dann gilt $F(t) = 0$ und somit $\int_0^\infty f(x)\,dx = 0$.

Das Riemann-Integral existiert dagegen nicht.

- Für Lebesgue-Integrale gelten die üblichen Rechenregeln / Eigenschaften, wie Linearität oder $\left|\int_\Omega f\,d\mu\right| \leq \int_\Omega |f|\,d\mu$. Darüberhinaus gilt der Transformationssatz und:

<u>Satz:</u> Sei (Ω, Σ, μ) ein beliebiger Maßraum. Dann gilt:

(i) <u>(Satz von der Monotonen Konvergenz)</u>

Sind $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots$ meßbare Funktionen $f_n : \Omega \to [0, \infty]$, dann ist

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\,d\mu = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n\,d\mu} \qquad (*)$$

(ii) <u>(Satz von der Majorisierten Konvergenz)</u>

Sind $\{f_n : \Omega \to \mathbb{C}\}_{n\in\mathbb{N}}$ meßbar und so, dass $\lim_{n\to\infty} f_n$ bzgl. μ fast überall existiert und es eine integrierbare Fkt. $g: \Omega \to [0,\infty]$ gibt, so dass $\forall n$: $|f_n| \leq g$, dann gilt $(*)$ ebenfalls.

Satz (Fubini): Ist $f: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ integrierbar, dann gilt:

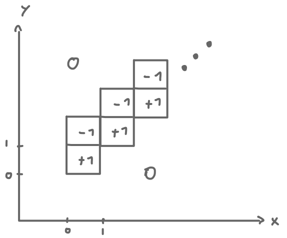
(i) $\mathbb{R}^m \ni x_1 \mapsto f(x_1, x_2)$ ist für fast alle $x_2 \in \mathbb{R}^n$ integrierbar.

(ii) $x_2 \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f(x_1, x_2)\, dx_1$ ist integrierbar

(iii)
$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} f(x_1,x_2)\, d(x_1,x_2) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x_1,x_2)\, dx_1 \right) dx_2} \qquad (*)$$

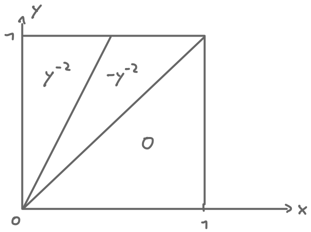
Bem.:

- Natürlich gilt all dies auch für $x_1 \leftrightarrow x_2$
- Für meßbare Funktionen $f: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ gilt $(*)$ ebenfalls. Ggfs. sind dann beide Seiten ∞.
- Beispiele auf $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, für die die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge nicht gilt:



$$\int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(x,y)\, dx \right) dy = 1$$

aber
$$\int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(x,y)\, dy \right) dx = 0$$



$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dx \right) dy = 0 \quad \text{aber}$$
$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dy \right) dx = -\log(2)$$

- Der Satz von Tonelli besagt, dass für $(*)$ ausreicht, dass eines der iterierten Integrale für $|f|$ existiert und endl. ist.