Mathematik 4 für Physik (Analysis 3) Zentralübung 16

Notiztitel 07.02.2013

14.4 Hilbertraum

Sei (x_n) orthogonale Folge im Hilbertraum $\mathcal{H}$, d.h. $\langle x_n, x_m\rangle = 0$, $n \neq m$

(a) Beh: Ist (x_n) konvergent, dann gilt $x_n \to 0$

Bew: Setze $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in \mathcal{H}$. Sei $m \in \mathbb{N}$ beliebig:

$$\langle x_m, x\rangle = \langle x_m, \lim_{n\to\infty} x_n\rangle = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\langle x_m, x_n\rangle}_{=\overline{\langle x_n, x_m\rangle}} = 0$$

[$x \mapsto \langle c, x\rangle$ ist stetig]

$$\langle x, x\rangle = \langle \lim_{m\to\infty} x_m, x\rangle = \lim_{m\to\infty} \langle x_m, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \blacksquare$$

$\langle , \rangle$ ist nicht ausgeartet

(b) Ist (x_n) orthonormal, so ist (x_n) nicht konvergent.

Betrachte $(n \neq m)$

$$\|x_n - x_m\|^2 = \langle x_n - x_m, x_n - x_m\rangle = \langle x_n, x_n\rangle + \langle x_m, x_m\rangle = 2 \text{ (Pythagoras)}$$

Wäre (x_n) Cauchyfolge, gäbe es zu $\epsilon = 1$ ein $N \in \mathbb{N}$, s.d. f.a. $n, m \geq N$ gilte $\|x_n - x_m\| < 1$ W

["$A \Rightarrow B$" ist wahr, wenn $\neg A$
"$\neg B \Rightarrow \neg A$"]

(c) Beispiel für (x_n) orthogonal mit $x_n \neq 0$ und $x_n \to 0$

[$L^2(\mathbb{R})$. $L^2([0,2\pi])$: ONB $\varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$ $k \in \mathbb{Z}$, Folgenraum $\ell^2 = L^2(\mathbb{N})$. $(a_n)\in\ell^2$ bedeutet $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$

$\langle (a_n),(b_n)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n}\, b_n$, Standardbasis (ONB) $e_n = (0,\dots,0,\underset{\substack{\uparrow\\ \text{n-te Stelle}}}{1},0\dots)$

Setze $x_n = \frac{1}{n} e_n \neq 0$. (x_n) ist orthogonal und $\|x_n\| = \frac{1}{n} \to 0$

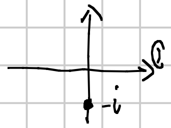
d.h. $x_n \to 0$.

(d) Gilt (a) auch im Prähilbertraum? Ja.

(e) Gilt (b) " ? Ja.

---

3. $f(x) = \frac{1}{(x+i)^2}$, $x\in\mathbb{R}$. Berechne $\hat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$



$$\sqrt{2\pi}\,\hat{f}(k) = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\frac{1}{(x+i)^2}}_{\text{gebr. rationale Fkt}} e^{-ikx}\,dx = \begin{cases} 0 & k<0 \\ -2\pi i \operatorname{Res}_{-i}\left(\frac{e^{-ikz}}{(z+i)^2}\right) & k>0 \end{cases}$$

Korrektur: $\frac{e^{-ikz}}{(z+i)^2} = \frac{e^{-ik(z+i)}}{(z+i)^2} e^{-k} = \frac{1-ik(z+i)+\dots}{(z+i)^2} e^{-k} = \left(\frac{1}{(z+i)^2} - \frac{ik}{z+i} + \dots\right) e^{-k}$ ⇒ Residuum ist $-ike^{-k}$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{f}(k) = -\sqrt{2\pi}\, e^{-k}\cdot k\ \Theta(k)}$$ (Insbes. $\hat{f}(0) = 0$, da $\hat{f}$ stetig)

$$\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left((z+i)^2 \frac{e^{-ikz}}{(z+i)^2}\right)\Bigg|_{z=-i} = -ik\, e^{-ikz}\Big|_{z=-i} = -ike^{-k}$$

$$\boxed{\text{Pol k-ter Ordnung}: \operatorname{Res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{(k-1)}}{dz^{k-1}} (z-z_0)^k f(z)\Big|_{z=z_0}}$$

$$\int |f(x)|^2\,dx = \int \frac{1}{(x+i)^2}\frac{1}{(x-i)^2}\,dx = \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \dots$$

Einfacher:

Plancherel: $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$

$$\int |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(k)|^2 dk = 2\pi \int_0^{\infty} k^2 e^{-2k} dk = \dots = \frac{\pi}{2} \quad \square$$

Riemann: Transformationssatz

$g: U \to g(U) \subseteq \mathbb{R}^n$, C^1-Diffeomorphismus, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $A \subseteq U$ kp,
mit ∂A Nullmenge (zB. stückweise glatter Rand)

$f: g(U) \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar:

$$\int_{g(A)} f(x)\,dx = \int_A f(g(y))\, \overbrace{|\det J_g(y)|}^{\text{"}\frac{\partial x}{\partial y}\text{"}}\, dy$$

Für uneigentl. R-Integrale: ausschöpfende Folgen.

Lebesgue: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen $g: U \to g(U) \subseteq \mathbb{R}^n$, C^1 Diffeom., $f: g(U) \to \mathbb{R}$ meßbar:

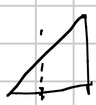
(i) f integrierbar auf $g(U)$ $\Leftrightarrow$ $f(g(y))|\det J_g(y)|$ integrierbar auf U

und es gilt

(ii) $$\boxed{\int_{g(U)} f(x)\,dx = \int_U f(g(y))\,|\det J_g(y)|\,dy}$$

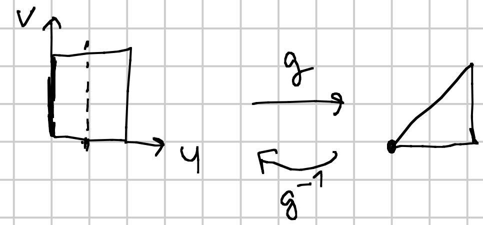
Bsp: • $\phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$ (Polarkoordinaten) eingeschränkt auf $(r,\varphi) \in \underbrace{(0,\infty)\times(0,2\pi)}_{U}$

$g(U) \subsetneq \mathbb{R}^2$ aber $\mathbb{R}^2 \setminus g(U)$ ist Nullmenge

•  $= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1], y \in [0,x]\} =: \Delta$. $\mathring{\Delta} = g(U)$

0 1

$\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ uv \end{pmatrix}$, $(u,v) \in (0,1)^2 =: U$



$g: U \to g(U)$ Diffeom.

$x = u \qquad u = x$

$y = uv \qquad v = \frac{y}{x}$ d.h. $\tilde{\varphi}^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ \frac{y}{x} \end{pmatrix}$

$$\int_{\Delta = \overline{g(U)}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_U f(\varphi(u,v)) \underbrace{|\det J\varphi(u,v)|}_{\left|\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & u \end{pmatrix}\right| = u \neq 0} du\,dv$$