Mathematatik 4 für Physik (Analysis 3) Zentralübung 12

Notiztitel 15.01.2013

Bem. zu A11.1 Lin. Algebra

$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ ist $f^{(n)} \in \operatorname{span}\left(\left\{ \underbrace{x^l e^{-\frac{x^2}{2}}}_{g_l(x)}, l = 0, \dots, n \right\}\right) =: V$ 4-dim.

Es gilt $f \in V \Rightarrow \hat{f} \in V$

$\hat{\ }\big|_V : V \to V$. Bestimme EW und EV von $\hat{\ }\big|_V$

Bem zu A11.4 (Lemma aus der Vorlesung)

Zeige für $f, g, h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$:

(i) $f * g = g * f$ (Kommutativität)

Bew: $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, d^n y$

$g * f(x) = \int f(y)\, g(x-y)\, d^n y \underset{\substack{\text{formel} \\ \tilde{y} = x-y \\ |\text{Jacobi det}| = 1}}{\overset{\text{Transf.}}{=}} \int f(x-\tilde{y})\, g(\tilde{y})\, d\tilde{y} = (f * g)(x)$

für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$

(ii) $(f * g) * h = f * (g * h)$ (Assoziativität) Bew. HA

(iii) $f * (g + h) = f * g + f * h$ (Distributivität)

$f * (g+h)(x) = \int f(x-y)\big(g(y) + h(y)\big)\, dy =$

$\int f(x-y)\, g(y)\, dy + \int f(x-y)\, h(y)\, dy$

$= f * g(x) + f * h(x)$ fast überall

(iv) $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \, \|g\|_1$

Bew: $\int \left| \int f(x-y) g(y) dy \right| dx \leq \int_{\mathbb{R}^{2n}} |f(x-y) g(y)| \, dy \, dx \overset{\text{Transf}}{\underset{\substack{\tilde{x}=x-y \\ \tilde{y}=y}}{=}}$

$= \int_{\mathbb{R}^{2n}} |f(\tilde{x})| \, |g(\tilde{y})| \, d\tilde{y} \, d\tilde{x} \overset{\text{Fubini}}{\underset{(*)}{=}} \int |f(x)| dx \int |g(y)| dy = \|f\|_1 \|g\|_1$

$\boxtimes$

Lemma: $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $h(x,y) = f(x) g(y)$ in $L^1(\mathbb{R}^{2n})$

Beweisidee: oE $f, g \geq 0$

(i) Gilt für Treppenfunktionen φ, ψ (Funktionen der Form

$$\varphi(x) = \sum_{h \in \mathbb{N}_0} a_h \chi_{A_h}(x) \text{ wobei } A_h \overset{\text{messbar}}{} \text{ paarweise disjunkt})$$

wegen dem Cauchy produktsatz:

$$\varphi(x) = \sum_{h \in \mathbb{N}_0} a_h \chi_{A_h}(x) \quad \text{mit } A_h = \varphi^{-1}(\{a_h\}) \text{ messbar}$$

$$\underbrace{\int \varphi(x) dx}_{\varphi \text{ integrierbar}} = \underbrace{\sum_{h \in \mathbb{N}_0} a_h \mu(A_h)}_{\text{absolut kgt}} .$$

φ integrierbar $\Leftrightarrow$ absolut kgt

$$\varphi(x) = \sum_{h \in \mathbb{N}_0} a_h \chi_{A_h}(x) \qquad \psi(y) = \sum_{\ell \in \mathbb{N}_0} b_\ell \chi_{B_\ell}(x)$$

dann ist $\underbrace{\varphi(x)\psi(y)}_{\text{Treppenfunktion}} = \sum_{h,\ell \in \mathbb{N}_0} a_h b_\ell \underbrace{\chi_{A_h \times B_\ell}(x,y)}_{\chi_{A_h}(x) \chi_{B_\ell}(y)}$

$$\int \varphi(x)\psi(y)\,dx\,dy = \sum_{k,\ell} \underbrace{a_k b_\ell \, \mu(A_k)\,\mu(B_\ell)}_{\text{abs kgt}}$$

$$\overset{\substack{\text{Cauchy-Produkt}\\ \downarrow}}{=} \underbrace{\sum_k a_k \, \mu(A_k)}_{\text{abs kgt}} \underbrace{\sum_\ell b_\ell \, \mu(B_\ell)}_{\text{abs kgt}} = \int \varphi(x)\,dx \int \psi(y)\,dy < \infty$$

(ii) Für beliebige L^1-Funktionen: Approximation durch Treppenfunktionen $(\varphi_n), (\psi_n)$, s.d. $\|\varphi_n - f\|_1 \xrightarrow{n\to\infty} 0$, $\|\psi_n - g\|_1 \to 0$

Ergebnis: $(x,y) \mapsto f(x)\cdot g(y)$ ist wieder in L^1 und

(Fubini:) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{2n}} f(x)\,g(y)\,dx\,dy = \int f(x)\,dx \int g(y)\,dy$.

Eigenschaften der Fouriertransformation

$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$\widehat{\alpha f + \beta g}(k) = \alpha \hat{f}(k) + \beta \hat{g}(k)$ (Linearität)

$\boxed{\widehat{\frac{\partial}{\partial x_j} f}(k) = i k_j \hat{f}(k)}$ $j = 1, \ldots, n$, falls $f \in C^1$, alle $\partial_j f \in L^1$

$\boxed{\widehat{x_j f}(k) = i \frac{\partial}{\partial k_j} \hat{f}(k)}$ $j = 1, \ldots, n$, falls alle $x_j f \in L^1$

meint: $x \mapsto x_j \cdot f(x)$

Faltung

$$\boxed{\widehat{f * g}(k) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{f}(k)\,\hat{g}(k)}$$

Fouriertransf.

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik\cdot x} f(x)\, d^n x$$

Rücktransf.

$$\check{F}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int e^{ik\cdot x} F(k)\, d^n k$$

$$\boxed{\check{\hat{f}}(x) = f(x) \quad \text{für fast alle } x\in\mathbb{R}^n, \text{ falls } f\in L^1(\mathbb{R}^n) \text{ und } \hat{f}\in L^1(\mathbb{R}^n)}$$

(insbesondere wenn f in x stetig ist!)

zusätzlich

Bemerkung zu Shannon-Nyquist-Abtasttheorem

1. A sendet Signal der (Kreis-)Frequenz ω, $f(t) = \cos\omega t$

   Übertragen mit Abtastfrequenz $\omega_0 = 2\pi$, d.h. $f_n = f(n)$, Zeiteinheit [ms]

   Abtastfrequenz 1kHz (Abtastkreisfrequenz 6,28kHz)

   Empfänger B kennt $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Das Ursprüngliche Signal könnte

   $\cos\omega t$ oder $\cos((2\pi+\omega)t)$, $\cos((-2\pi+\omega)t$

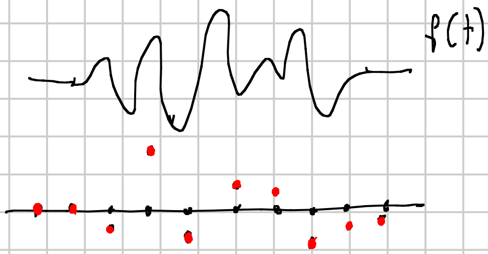
z.B. Samplerate 1kHz

A sendet 100Hz

B erkennt 100Hz oder 900Hz oder 1,1kHz, 1,9kHz, ...

Vereinbarung: A sendet nur Frequenzen im Intervall [-500, 500]
(halbe Abtastratenfrequenz). Eindeutige Übertragung möglich

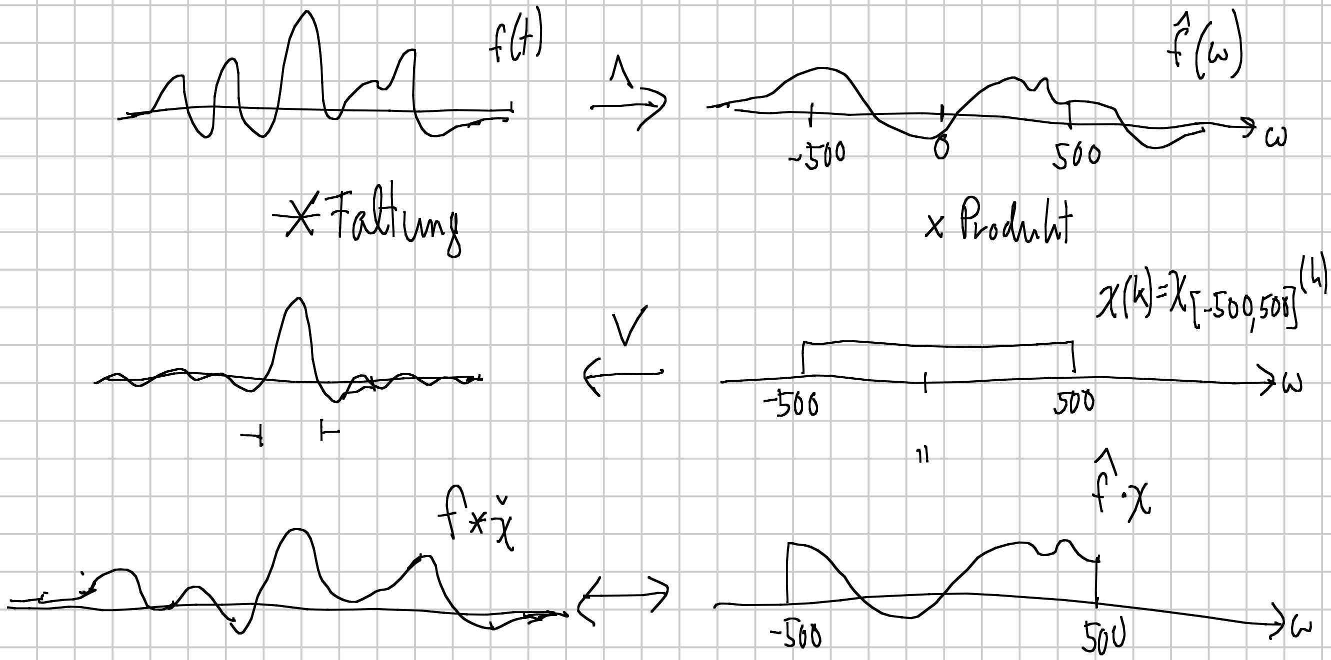
2. A sendet stetiges Signal:



abgetastete Übertragung:

keine Rekonstruktion möglich

3. A filtert mit Tiefpass alle Frequenzen ≥ 500 Hz heraus



- A überträgt $f * \check{\chi}$ gesampelt mit 1kHz, $\tilde{f}_n = f * \check{\chi}(n)$
- B rekonstruiert aus $(\tilde{f}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ die Funktion $f * \check{\chi}$

z.B. Audio CD Frequenz < 22 kHz, Abtastfrequenz 44,2 kHz ∎