Mathematik 4 für Physik (Analysis 3) Zentralübung 7

Notiztitel 27.11.2012

<u>Wdh.</u> Homotopie von Wegen. $U \subseteq \mathbb{C}$ offen

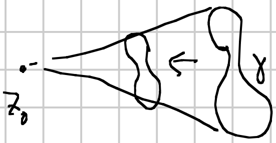
$\gamma : [0,T] \to U$

– (geschlossen) γ heißt <u>nullhomotop</u> in U, wenn es stetige Deformation von γ zu einem konstanten Weg gibt. d.h. es gibt stetiges $F : [0,1] \times [0,T] \to U$ mit $F(0,t) = \gamma(t)$ und $F(1,t) = z_0 \in U$

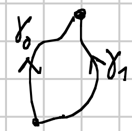
Bsp.: • $\gamma(t) = e^{2\pi i t}$ $t \in [0,1]$ ist nullhomotop in $\mathbb{C}$. $F(s,t) = (1-s)e^{2\pi i t}$

• U sternförmig mit Zentrum $z_0 \in U$, $\gamma : [0,1] \to U$ beliebig

$F(s,t) = (1-s)\gamma(t) + s z_0$



– γ_0 homotop zu γ_1 in U wenn $\gamma_0 - \gamma_1$ nullhomotop ist



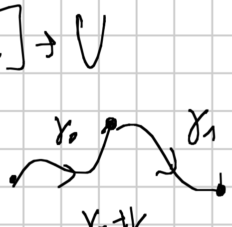
(γ_0, γ_1 gleiche Randpunkte

Bemerkung $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to U$ Kurven

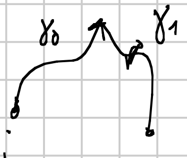
Die Kurve $-\gamma_0$ ist $-\gamma_0(t) := \gamma_0(1-t)$

Falls $\gamma_0(1) = \gamma_1(0)$: Die Kurve $\gamma_0 + \gamma_1 : [0,2] \to U$

$$(\gamma_0 + \gamma_1)(t) = \begin{cases} \gamma_0(t) & t \leq 1 \\ \gamma_1(t-1) & t > 1 \end{cases}$$

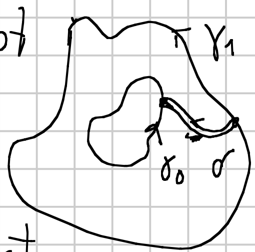


$\gamma_0 - \gamma_1 = \gamma_0 + (-\gamma_1)$ falls $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$



Achtung: nicht kommutativ, aber sehr praktische Notation

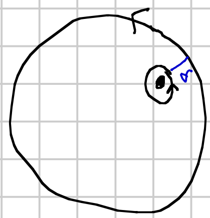
Definition γ_0, γ_1 geschlossene Kurven heißen frei homotop in U wenn es ein Kurve $\delta : [0,1] \to U$ mit $\delta(0) = \gamma_0(0)$, $\delta(1) = \gamma_1(0)$ gibt und γ_0 homotop zu $\delta + \gamma_1 - \delta$ ist



Korollar zum Satz von Cauchy-Goursat

Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Sind γ_0, γ_1 geschlossene Kurven und frei homotop in U, dann ist

$$\oint_{\gamma_0} f(z)\,dz = \oint_{\gamma_1} f(z)\,dz .$$



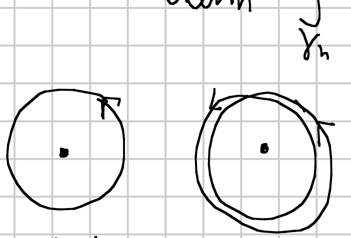
Bemerkung: Freie Homotopie ist Äquivalenzrelation für geschlossene Kurven in U

Beispiel: $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $\quad \gamma_n(t) = e^{2\pi i n t}$, $t \in [0,1]$, $n \in \mathbb{Z}$

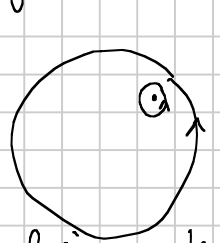
Beh: Für $n \neq m$ ist γ_n nicht frei homotop zu γ_m in $\mathbb{C}^\times$

Beweis: $f(z) = \frac{1}{z}$ $\qquad \int_{\gamma_n} \frac{dz}{z} \neq \int_{\gamma_m} \frac{dz}{z}$

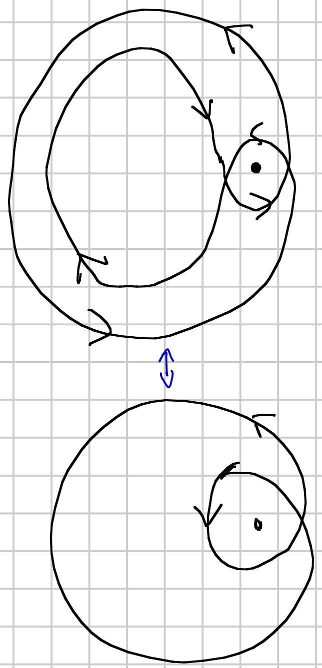
$$\text{denn} \int_{\gamma_n} \frac{dz}{z} = \int_0^1 \frac{2\pi i n e^{2\pi i n t}}{e^{2\pi i n t}}\,dt = 2\pi i n .$$

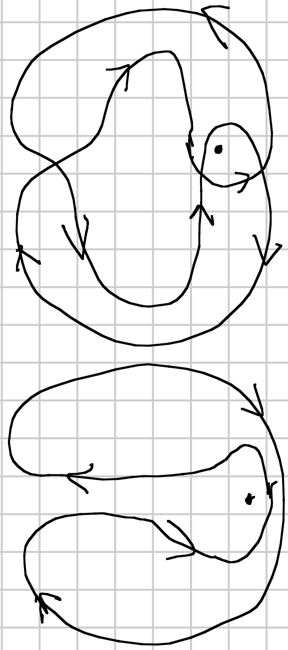


nicht frei homotop



frei homotop



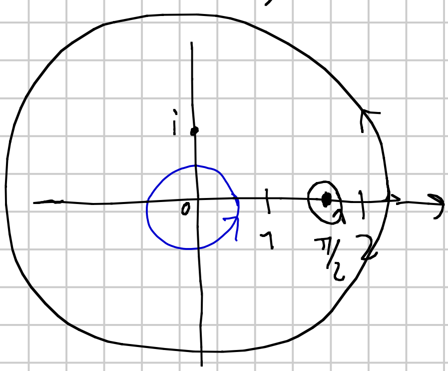


frei homotop zu $\gamma_z(\odot)$ nullhomotop

- Cauchy-Integralformel

$$I := \oint_{|z|=r} \frac{\sin z}{2z-\pi}\, dz, \quad r>0.$$

Integrand $\dfrac{\frac{1}{2}\sin z}{z-\frac{\pi}{2}}$ holomorph auf $\mathbb{C}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$



$r<\frac{\pi}{2}$: $I=0$, da Integrand holomorph auf $\overline{B_r(0)}$

$r=\frac{\pi}{2}$: nicht definiert

$r>\frac{\pi}{2}$: Cauchy Formel: $f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_{|w-z|=\epsilon}\frac{f(w)}{w-z}\,dw$

$$\oint_{|z|=r} \frac{\frac{1}{2}\sin z}{z-\pi/2}\,dz \overset{\text{fr. hom.}}{=} \oint_{|z-\frac{\pi}{2}|=\epsilon} \frac{\frac{1}{2}\sin z}{z-\frac{\pi}{2}}\,dz \overset{\text{C-F}}{=} 2\pi i\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} = \pi i.$$

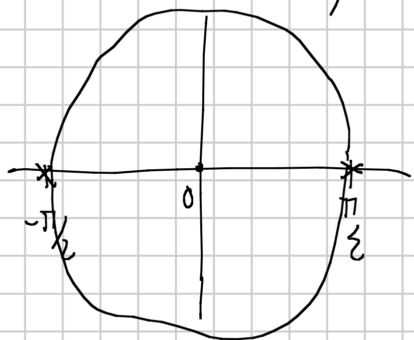
Potenzreihenentwicklung, Kgzradius

Bsp: • $\frac{1}{z}$ holomorph auf $\mathbb{C}^\times$. Also gibt es für $z_0 \neq 0$ Potenzreihenentwicklung mit Konvergenzradius $|z_0|$. Explizit

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z_0-(z_0-z)} = \frac{1}{z_0}\,\frac{1}{1-\frac{z_0-z}{z_0}} = \frac{1}{z_0}\sum_{n\geq 0}\frac{(z_0-z)^n}{z_0^n} = \sum_{n\geq 0}\frac{(z_0-z)^n}{z_0^{n+1}} \quad \text{für } |z-z_0|<z_0$$

• Tangens. $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$ holomorph auf $\mathbb{C}\setminus\left(\pi\mathbb{Z}+\frac{\pi}{2}\right)$

Potenzreihenentwicklung im Ursprung:



$$\tan z = \frac{z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}\mp\cdots}{1-\left(\frac{z^2}{2}-\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}\pm\cdots\right)}$$

$$= \left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}\pm\cdots\right)\left[1+\left(\frac{z^2}{2}-\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}\pm\cdots\right)+\left(\frac{z^2}{2}-\frac{z^4}{4!}\pm\cdots\right)^2+\left(\frac{z^2}{2}\pm\cdots\right)^3+\cdots\right]$$

$$= \left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}\pm\cdots\right)\left(1+\frac{z^2}{2}-\frac{z^4}{4!}+\frac{z^4}{4}+\frac{z^6}{6!}-2\frac{z^6}{2\cdot 4!}+\frac{z^6}{8}\pm\cdots\right]$$

$$= \cdots = z+\frac{z^3}{3}+\frac{2}{15}z^5+\frac{17}{315}z^7+\cdots \quad \text{(Höhere Terme durch Bernoullizahlen)}$$

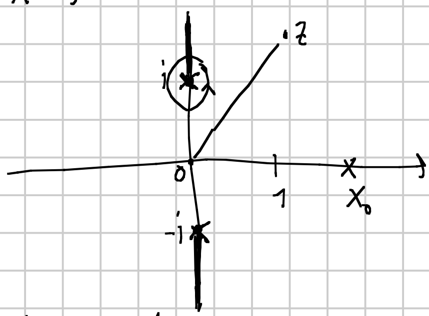
Konvergenzradius $\frac{\pi}{2}$!

Stammfunktionen:

Komplexer Arcustangens als Umkehrfunktion des Tangens ist nicht eindeutig. $\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$

arctan als Stammfunktion von $\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{i/2}{z+i} - \frac{i/2}{z-i}$

$\frac{1}{z^2+1}$ holomorph auf $\mathbb{C}\setminus\{\pm i\}$



Wegen $\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{dz}{z^2+1} = \int\limits_{|z-i|=1} \frac{-i/2}{z-i}\, dz = \pi \neq 0$

gibt es keine Stammfkt auf $\mathbb{C}\setminus\{\pm i\}$, aber auf der sternförmigen Menge $\mathbb{C}\setminus\{iy \mid |y| \geq 1\}$

$$\arctan z := \int_0^z \frac{dw}{w^2+1}$$

Beh: $\arctan z = \frac{1}{2i}\left(\ln(1+iz) - \ln(1-iz)\right)$ (Hauptzweig)

Bew: Bei $z=0$ gleich und gleiche Ableitung auf $\mathbb{C}\setminus\{iy \mid |y|\geq 1\}$

Frage: Was ist der Konvergenzradius von $\arctan z = \sum_{n\geq 0} c_n (z-x_0)^n$, $x_0 \in \mathbb{R}$? Antwort Abstand zu $\pm i$, also $\sqrt{1+x_0^2}$

$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 \mp \cdots$, $\arctan z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} \pm \cdots$

Anwendungen:

- Nachtrag zu Potenzreihen

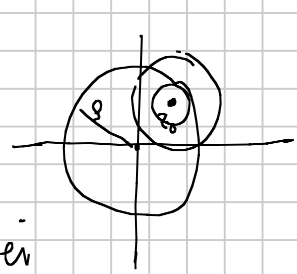
$$f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n z^n \quad \text{Kgzradius } \varrho > 0$$

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k, \quad f_n \to f \text{ glm auf } B_r(0),\ r<\varrho$$

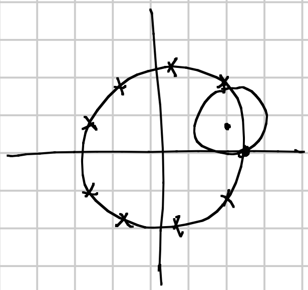
Weierstrass

$$\Rightarrow \quad f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z) \text{ ist holomorph auf } B_r(0) \text{ für alle } r<\varrho$$

und damit auf $B_\varrho(0)$.

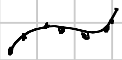


- $f_n(z) = \dfrac{1}{1-z^n}$ Nenner hat Nullstellen bei $e^{2\pi i \frac{k}{n}}$ $k=0,1,\dots,n-1$



$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z) = \begin{cases} 1 & \text{für } |z|<1 \\ 0 & \text{für } |z|>1 \end{cases}$$

- $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ Beh: $f(z) := \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{z-\gamma(t)}\,\dot\gamma(t)\,dt$ ist holomorph auf $\mathbb{C}\setminus\gamma([0,1])$



Bew. Sei $B_\varepsilon(z) \subseteq \mathbb{C}\setminus\gamma([0,1])$, $D \subseteq B_\varepsilon(z)$ Dreieck. Dann

$$\oint_{\partial D} f(z)\,dz \ \oint_{\partial D} \int_0^1 \frac{1}{z-\gamma(t)}\,\dot\gamma(t)\,dt\,dz \overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^1 \underbrace{\int_{\partial D} \frac{1}{z-\gamma(t)}\,dz}_{=0}\,\dot\gamma(t)\,dt = 0$$

Nach dem Satz von Morera (f ist stetig, Parameterintegral) ist f holomorph auf $B_\varepsilon(z)$ und damit auch auf $\mathbb{C}\setminus\gamma([0,1])$. ∘

Was ist z.B. $f(z) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{z-x}\,dx$?