Volumenfunktion & Transformationssatz

$\mathcal{J}_n := \{ A \subseteq \mathbb{R}^n \mid A$ beschränkt und ∂A vom Lebesgue-Maß Null $\}$

Satz: Die Abbildung $\mathrm{vol}: \mathcal{J}_n \to \mathbb{R}$, $A \mapsto \int_A dx$ besitzt folgende Eigenschaften: $\forall A, B \in \mathcal{J}_n$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$

(i) Nichtnegativität $\quad \mathrm{vol}(A) \geq 0$

(ii) Monotonie $\quad \mathrm{vol}(A) \geq \mathrm{vol}(B) \Leftarrow A \supseteq B$

(iii) Additivität $\quad \mathrm{vol}(A \cup B) = \mathrm{vol}(A) + \mathrm{vol}(B) \Leftarrow A^\circ \cap B^\circ = \emptyset$

(iv) Translationsinvarianz $\quad \mathrm{vol}(A+x) = \mathrm{vol}(A)$

(v) Normierung $\quad \mathrm{vol}(Q) = 1$ für $Q = [0,1]^n$

(vi) Rotationsinvarianz $\quad U \in O(n)$: $\mathrm{vol}(UA) = \mathrm{vol}(A)$

$\quad O(n) := \{ U \in M_n(\mathbb{R}) \mid U^T U = \mathbb{1} \}$

(vii) Skalierung: Ist $\{e_i\}_{i=1}^n$ ONB und $\Lambda \in B(\mathbb{R}^n)$, $e_i \mapsto s_i e_i$ mit $s_i \geq 0$ dann gilt $\mathrm{vol}(\Lambda A) = \mathrm{vol}(A) \prod_{i=1}^n s_i$

Bemerkung: (i)-(v) legen die Volumenfunktion eindeutig fest

Wir importieren ein nützliches Werkzeug aus der linearen Algebra:

Satz: (Singulärwertzerlegung) Für jede Matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$ gibt es orthogonale Transformationen $U \in O(n)$, $V \in O(m)$ und $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times m}$, so dass

$$M = U \Lambda V, \quad \Lambda_{kl} = \begin{cases} s_k \geq 0, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}.$$

Bemerkungen
- Für positiv semi-definites M ist dies die Eigenwertzerlegung.
- Die Menge der „Singulärwerte" $\{s_k\}$ ist eindeutig für jedes M.
- $\mathrm{spec}\{M^T M\} = \{s_k^2\}$

Korollar: Sei $M \in M_n(\mathbb{R})$ und $A \in \mathcal{J}_n$. Dann gilt:

$$\boxed{\operatorname{vol}(MA) = |\det(M)| \operatorname{vol}(A)}$$

Beweis: Singulärwertzerlegung $M = U\Lambda V$ mit $U, V \in O(n)$, $\Lambda_{kl} = \delta_{kl} s_k$, $s_k \geq 0$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{vol}(MA) &= \operatorname{vol}(U\Lambda V A) \\
&\overset{(vi)}{=} \operatorname{vol}(\Lambda V A) \\
&\overset{(vii)}{=} \operatorname{vol}(VA) \prod_{i=1}^{n} s_i \\
&\overset{(vi)}{=} \operatorname{vol}(A) \, |\det M|
\end{aligned}$$

da $|\det(M)| = |\det(U)\det(\Lambda)\det(V)| = |\det(\Lambda)| = \prod_{i=1}^{n} s_i$ $\square$

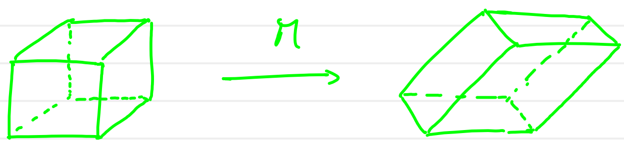
$U \in O(n) \Rightarrow \det(U) = \pm 1$

da aus $U^T U = \mathbb{1}$ folgt, dass

$$\begin{aligned}
\det(U^T)\det(U) &= 1 \\
&= \det(U)^2
\end{aligned}$$

wegen $\det(U) \in \mathbb{R}$ ist dann $\det(U) \in \{\pm 1\}$

Bemerkung: Der Einheitsquader $[0,1]^n$ wird von M auf ein „Parallelotop" mit Volumen $\operatorname{vol}(M[0,1]^n) = |\det M|$ abgebildet.



Erinnerung: • $g \in C^1(U,V)$, $U,V \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt „C^1-Diffeomorphismus" falls g bijektiv und $g^{-1}: V \to U$ diff.bar ist.

• Dann gilt automatisch $g^{-1} \in C^1(V,U)$

• Oft heißt $g: U \to V$ „Koordinatentransformation", und $g^{-1}: V \to U$ „Parametrisierung"

Lemma: (Charakterisierung von C^1-Diffeomorphismen)

Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $g \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ injektiv. Dann ist $g: U \to g(U)$ genau dann ein C^1-Diffeomorphismus, wenn $\det(J_g(x)) \neq 0 \quad \forall x \in U$.

Beweis: '$\Rightarrow$' mit $y = g(x)$ und $g^{-1} \circ g(x) = x$ folgt aus der Kettenregel

$g^{-1\,\prime}(y)\, g'(x) = id$ also $J_{g^{-1}}(y)\, J_g(x) = \mathbb{1}$

und damit $\det(J_{g^{-1}}(y)) \cdot \det(J_g(x)) = 1$

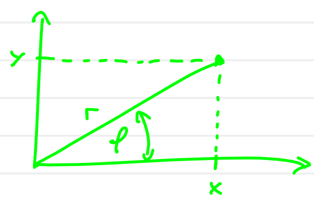
'$\Leftarrow$' wegen Bijektivität existiert eine globale Umkehrfunktion, so dass die Aussage aus dem Satz über lokale Umkehrbarkeit folgt.

$\square$

Bsp.: ① Polarkoordinaten

$U := \{ (r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid r > 0,\ \varphi \in (0, 2\pi) \}$

$g(r,\varphi) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



$J_g(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$

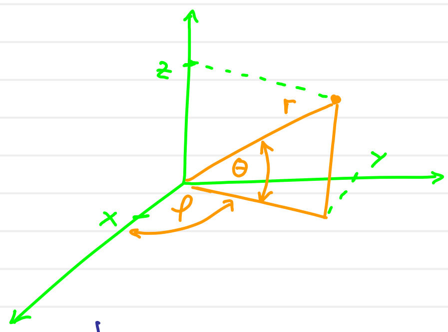
$\to \det(J_g(r,\varphi)) = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r$

$g: U \to g(U)$ ist bijektiv mit $g(U) = \mathbb{R}^2 \setminus \{ (x,y) \mid x \geq 0,\ y = 0 \}$ und damit C^1-Diffeomorphismus.

② Kugelkoordinaten

$$U := \{ (r,\varphi,\theta) \in \mathbb{R}^3 \mid r>0,\ \varphi \in (0,2\pi),\ \theta \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \}$$

$$g(r,\varphi,\theta) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi \cos\theta \\ r\sin\varphi \cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



$$J_g(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\cos\theta & -r\cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\theta & 0 & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\det(J_g(r,\varphi,\theta)) = r^2\cos\theta$$

$g: U \to g(U)$ ist C^1-Diffeomorphismus mit $g(U) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) \mid x \geq 0, y = 0\}$

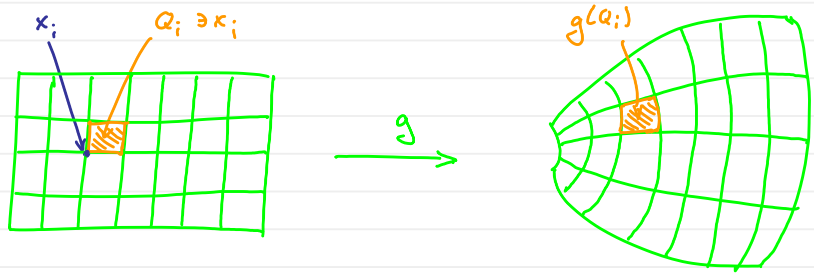
Satz: (Transformationssatz) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $g: U \to g(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ ein C^1-Diffeomorphismus, $A \subseteq U$ kompakt mit ∂A vom Lebesgue-Maß Null. Dann gilt für jede Riemann-integrierbare Fkt. $f: g(A) \to \mathbb{R}$:

$$\int_{g(A)} f(x)\,dx = \int_A f(g(x))\, |\det J_g(x)|\, dx,$$

wobei $(J_g(x))_{kl} := \frac{\partial g_k}{\partial x_l}(x)$ Jacobi-Matrix an der Stelle x ist.

Bemerkungen:
- $g(A)$ ist wieder kompakt & $\partial g(A) = g(\partial A)$ vom L.-M. Null.
- Es genügt, wenn $g \in C^1$ fast überall Diffeomorphismus ist.
- $\det(J_g(x))$ heißt „Funktionaldeterminante"

Beweisidee: Sei: $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader mit Zerlegung $A = \bigcup_{i=1}^m Q_i$, $Q_i = x_i + Q_0$, $x_i \in Q_i$



Für immer feiner werdende Zerlegungen gilt wegen Integrierbarkeit von f:

$$\left| \int_{g(A)} f(y)\,dy - \sum_{i=1}^m f(g(x_i)) \operatorname{vol}(g(Q_i)) \right| \to 0$$

Wegen Differenzierbarkeit von g gilt zudem:

$g(x) = g(x_i) + g'(x_i)(x - x_i) + o(\|x - x_i\|)$ und damit

$g(Q_i) = g(x_i + Q_0) \approx g(x_i) + g'(x_i) Q_0$, also

$\operatorname{vol}(g(Q_i)) \approx \operatorname{vol}(g(x_i) + g'(x_i) Q_0) = \operatorname{vol}(g'(x_i) Q_0)$

Translationsinvarianz

Volumen eines Parallelotops $= |\det J_g(x_i)| \operatorname{vol}(Q_i)$

$$\to \int_{g(A)} f(y)\,dy \approx \sum_{i=1}^m f(g(x_i)) |\det J_g(x_i)| \operatorname{vol}(Q_i) \approx \int_A f(g(x)) |\det J_g(x)|\,dx$$

$\square$