Einschub: weitere Folgerungen aus dem Gauß'schen Integralsatz:

① Volumenberechnung als Oberflächenintegral:

$$\mathrm{vol}(A) = \int_A dx \underset{\substack{\uparrow \\ F(x) := x,\ x \in A \subseteq \mathbb{R}^n}}{=} \frac{1}{n} \int_A \nabla \cdot F(x)\, dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Gauß}}}{=} \int_{\partial A} \langle x, \nu(x) \rangle\, dS(x)$$

② Eindeutigkeit der Lösung der Poisson Gleichung:

Gegeben: $g \in C^2(V \supseteq \partial A, \mathbb{R})$, $f \in C(A, \mathbb{R})$

Gesucht: $\phi \in C^2(U \supseteq A, \mathbb{R})$, so daß

$$\Delta \phi(x) = f(x) \quad \forall x \in A \qquad \text{„Poisson Gleichung"}$$

mit $\begin{cases} \phi(x) = g(x) \quad \forall x \in \partial A & \text{„Dirichlet R.b." oder} \\ \nabla \phi(x) = g(x) \quad \text{—"—} & \text{„Neumann R.b."} \end{cases}$

Angenommen es gibt zwei Lösungen ϕ_1, ϕ_2.

$\psi := \phi_1 - \phi_2$ löst dann die „Laplace Gleichung" $\Delta \psi = 0$

und aus der ersten Green'schen Formel folgt:

$$\int_A \|\nabla \psi(x)\|^2 + \psi(x) \underbrace{\Delta \psi(x)}_{=0}\, dx = \int_{\partial A} \underbrace{\psi \langle \nabla \psi(x), \nu(x) \rangle}_{=0} \, dS(x)$$

$=0$ da entweder $\psi|_{\partial A} = 0$ oder $\nabla \psi|_{\partial A} = 0$.

Demnach ist $\int_A \|\nabla \psi(x)\|^2 = 0$ und wegen Stetigkeit $\nabla \psi = 0$

Dirichlet: $\psi|_{\partial A} = 0 \wedge \nabla \psi = 0$ also $\phi_1 = \phi_2$

Neumann: $\nabla \psi|_{\partial A} = 0 \wedge \nabla \psi = 0$ also $\phi_1 = \phi_2 + \text{const.}$

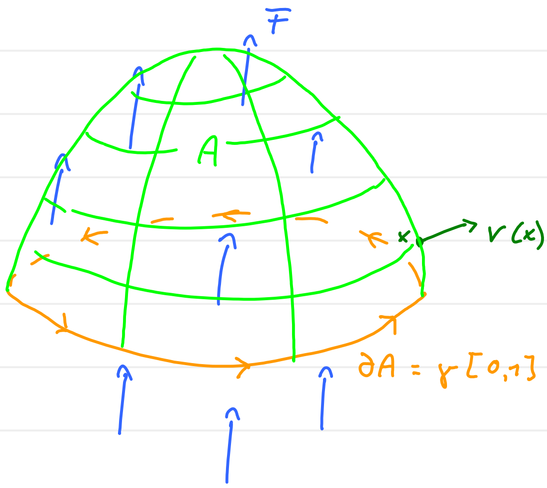
Satz (Stokes'scher Integralsatz für $n=3$)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $F \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ ein Vektorfeld, $V \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $\psi : V \to U$ ein C^2-Diffeomorphismus und $M \subseteq V$ eine endliche Vereinigung von Normalbereichen. Dann gilt für die Fläche $A := \psi(M)$ mit Rand $\partial A := \psi(\partial M)$:

$$\boxed{\int_A \langle \operatorname{rot} F(x), \nu(x) \rangle \, dS(x) = \oint_{\partial A} F(r) \cdot dr,}$$

wenn die Orientierung der Randkurve so ist, dass beim Durchlaufen die Fläche links liegt, wenn man sich gemäß des nach oben zeigenden Normalenfeldes ν „auf" ihr befindet.

Beweis: für den Fall, dass $\tilde{\gamma} \in C^1([0,1], \partial M)$ ganz ∂M parametrisiert:



Mit $\gamma := \psi \circ \tilde{\gamma}$ gilt dann

$$\oint_{\partial A} F(r) \cdot dr = \int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) \, dt$$

$$= \int_0^1 F\big(\psi \circ \tilde{\gamma}(t)\big) \cdot \psi'(\tilde{\gamma}(t)) \, \dot{\tilde{\gamma}}(t) \, dt$$

$$= \int_{\partial M} G(\tilde{r}) \cdot d\tilde{r} \qquad \text{mit} \quad G(y) := F \circ \psi(y) \, \psi'(y) \quad \forall y \in V$$

$$\text{also} \quad G(y) = \begin{pmatrix} \langle F \circ \psi(y), \partial_1 \psi(y) \rangle \\ \langle F \circ \psi(y), \partial_2 \psi(y) \rangle \end{pmatrix}$$

andererseits gilt:

$$\int_A \langle \operatorname{rot} F(x), \nu(x) \rangle \, dS(x) = \int_M \langle \operatorname{rot} F(\psi(y)), \nu(\psi(y)) \rangle \sqrt{\det[\psi'(y)^T \psi'(y)]} \, dy$$

$$= \int_M \langle \nabla \times F(\psi(y)), \partial_1 \psi(y) \times \partial_2 \psi(y) \rangle \, dy$$

$$\nu(\psi(y)) = \frac{\partial_1 \psi(y) \times \partial_2 \psi(y)}{\| \partial_1 \psi(y) \times \partial_2 \psi(y) \|}$$

$$\sqrt{\det[\psi'(y)^T \psi'(y)]} = \| \partial_1 \psi(y) \times \partial_2 \psi(y) \|$$

$$= \int_M \sum_{ijkmn=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} \, \partial_j F_k(\psi(y)) \, \partial_1 \psi_m(y) \, \partial_2 \psi_n(y) \, dy$$

$$= \int_M \sum_{jk} \Big(\partial_j F_k(\psi(y)) \, \partial_1 \psi_j(y) \, \partial_2 \psi_k(y) - \partial_j F_k(\psi(y)) \, \partial_1 \psi_k(y) \, \partial_2 \psi_j(y) \Big) \, dy$$

$$\sum_i \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}$$

$$\partial_1 \partial_2 \psi(y) = \partial_2 \partial_1 \psi(y), \quad \text{da } \psi \in C^2$$

$$= \int_M \partial_1 \Big(\underbrace{\sum_k F_k \circ \psi(y) \, \partial_2 \psi_k(y)}_{= G_2(y)} \Big) - \partial_2 \Big(\underbrace{\sum_k F_k \circ \psi(y) \, \partial_1 \psi_k(y)}_{= G_1(y)} \Big) \, dy$$

$$= \int_M \big(\partial_1 G_2(y) - \partial_2 G_1(y) \big) \, dy$$

$$= \oint_{\partial M} G(\tilde{r}) \cdot d\tilde{r} \quad \text{nach dem Satz von Green.}$$

$\square$

Interpretation der Rotation wenn F Geschw.feld einer Flüssigkeit ist:

$$\frac{\nabla\times F}{\|\nabla\times F\|} \mathrel{\hat{=}} \text{Rotationsachse}$$

$$\|\nabla\times F\| \mathrel{\hat{=}} \text{doppelte Winkelgeschw.}$$

Erinnerung:

- $F=\nabla\phi \iff \oint F(r)\cdot dr = 0$ Gradientenfeld $\iff$ konservativ
- $F=\nabla\phi,\ \phi\in C^2 \Rightarrow \nabla\times F = 0$ rotationsfrei
- $\nabla\times F = 0$ auf sternförmigem Gebiet $\Rightarrow F=\nabla\phi$
- $F=\nabla\times A,\ A\in C^2 \Rightarrow \nabla\cdot F = 0$ divergenzfrei

Bemerkung: Ist $F\in C^2(V\subseteq\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$, V beschränkt, dann gibt es $\phi\in C^1(V,\mathbb{R})$ und $A\in C^1(V,\mathbb{R}^3)$, so dass

$$F = \nabla\phi + \nabla\times A \qquad \text{„Helmholtz Zerlegung"}$$

Korollar (Cauchyscher Integralsatz – 1. Version)

Sei $u,v\in C^1(U\subseteq\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, $f(x+iy):=u(x,y)+iv(x,y)$, $A\subseteq\mathbb{C}$ einfach zusammenhängend mit $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+iy\in A\}\subseteq U$ und berandet durch $\partial A = \{\gamma(t):=x(t)+iy(t) \mid t\in[0,1]\}$ mit $\gamma(0)=\gamma(1)$ und $x,y\in C^1([0,1],\mathbb{R})$. Dann ist

$$\boxed{\oint_{\partial A} f(z)\,dz := \int_0^1 f(\gamma(t))\,\dot\gamma(t)\,dt = 0, \text{ wenn } \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \wedge \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ auf ganz } U \text{ gilt.}}$$

„Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen"

Bemerkung: γ stückweise C^1 genügt.

Beweis:

$$\oint_{\partial A} f(z)\cdot dz := \int_0^1 f(\gamma(t))\,\dot{\gamma}(t)\;dt$$

$$= \int_0^1 u(x(t),y(t))\,\dot{x}(t) - v(x(t),y(t))\,\dot{y}(t)\quad dt$$

$$+ i\int_0^1 u(x(t),y(t))\,\dot{y}(t) + v(x(t),y(t))\,\dot{x}(t)\quad dt$$

$$= \oint_{\partial A} \begin{pmatrix} u(r) + i v(r) \\ -v(r) + i u(r) \end{pmatrix} \cdot dr$$

Satz von Green

$$= -\int_A \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)(x,y)\; dS(x,y) + i\int_A \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)(x,y)\, dS(x,y)$$

$\square$