....
Note

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang (Hauptfach)

Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
$\sum$		

I .... Erstkorrektur

II .... Zweitkorrektur

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Klausur
Mathematik für Physiker 4
(Analysis 3)

Prof. Dr. M. Wolf

15. Februar 2013, 11:30 – 13:00 Uhr

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **8** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Es sind **keine** Hilfsmittel erlaubt.

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen.
Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

1. **Volumenberechnung** **[6 Punkte]**

Berechnen Sie das Volumen der Menge $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 \leq 1 \text{ und } y^2 + z^2 \leq 1\}$.
HINWEIS: Integrieren Sie die z-Variable als letztes aus.

2. **Transformationsformel** **[12 Punkte]**

Sei $M := \{(x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \mid \frac{x}{y} \in [1,4], xy \in [1,4]\}$ und $f(x,y) = x^3 y$. Gegeben ist die Parametertransformation $(x,y) = g(u,v) = \left(\sqrt{uv}, \sqrt{\frac{u}{v}}\right)$.

(a) Geben Sie die Jacobi-Determinante von g auf $(\mathbb{R}^+)^2$ an:

$\det J_g(u,v) =$

(b) Wie lautet die Umkehrabbildung von g auf $(\mathbb{R}^+)^2$?

$g^{-1}(x,y) =$

(c) Skizzieren Sie die Menge M.

(d) Wie lautet die Menge $B = g^{-1}(M)$.

$B =$

(e) Geben Sie den Wert von $\int\limits_M f(x) d^2x$ an.

$\int\limits_M f(x,y) dx dy =$

3. **Oberflächenintegrale** **[8 Punkte]**

Sei die Fläche $A := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z = 4,\ z \geq 0\}$ so orientiert, dass das Normalenfeld eine positive z-Komponente hat, und $v(x,y,z) = \begin{pmatrix} z^2 - y \\ x \\ x^y \sin z \end{pmatrix}$ ein Vektorfeld.

(a) Wie lautet das auf Eins normierte Normalenvektorfeld $n(x,y,z)$ im Punkt $(x,y,z) \in A$?

$n(x,y,z) =$

(b) Was besagt allgemein der Satz von Stokes für den Fluss von $\operatorname{rot} v$ durch A?

(c) Geben Sie eine Parametrisierung der Randlinie ∂A von A an.

$\gamma(t) =$

(d) Welchen Wert hat der Fluss von $\operatorname{rot} v$ durch A?

$\int\limits_A \langle \operatorname{rot} v, n \rangle dS =$

4. **Residuen** **[7 Punkte]**

Sei $f(z) = \frac{1}{(z+\frac{1}{z})}$.

(a) f hat bei $z = 0$

☐ keine Singularität, ☐ eine hebbare Singularität,
☐ einen Pol erster Ordnung, ☐ eine wesentliche Singularität.

(b) Bestimmen Sie das Residuum von f bei $z = i$.

$\mathrm{Res}_i(f) =$

(c) Welchen Konvergenzradius R hat die Potenzreihenentwicklung von f im Entwicklungspunkt $z = 1$?

$R =$

(d) Welchen Wert hat das komplexe Wegintegral $\int_\gamma f(z)dz$ entlang der Kurve $\gamma : [0, 6\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = i + \sqrt{2}e^{-it}$?

$\int_\gamma f(z)dz =$

5. **Residuenkalkül** **[12 Punkte]**

Sei $f(z) = \frac{e^{\alpha z}}{1+e^z}$ mit $0 < \alpha < 1$.

(a) Berechnen Sie das Residuum von $f(z)$ bei $z = i\pi$.

(b) Welchen Wert hat $\int\limits_{\partial Q} f(z)dz$ für $Q_R := \{x + iy \in \mathbb{C} \,|\, x \in [-R, R],\ y \in [0, 2\pi]\}$, $R > 0$?

(c) Zeigen Sie, dass $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$.

HINWEIS: Benutzen Sie, dass $|f(x + iy)| \leq \frac{e^{\alpha x}}{|1-e^x|} \to 0$ für $|x| \to \infty$.

6. **Fouriertransformation** **[8 Punkte]**

(a) Beweisen Sie für $f \in L^1(\mathbb{R})$ und $g(x) := e^{ik_0 x} f(x)$ die Identität $\widehat{g}(k) = \widehat{f}(k - k_0)$.

(b) Wie lautet die Fouriertransformierte von $g(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2} \cos x$, $x \in \mathbb{R}$?

(c) Sei nun mit dem g aus (b) die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $h(x) = \begin{cases} g(x) & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

(i) Welche Aussagen gelten für h?

☐ $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, ☐ h ist stetig, ☐ $h \in L^1(\mathbb{R})$, ☐ $h \in L^2(\mathbb{R})$.

(ii) Welche Aussagen gelten für $\widehat{h}$?

☐ $\widehat{h} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, ☐ $\widehat{h}$ ist stetig, ☐ $\widehat{h} \in L^1(\mathbb{R})$, ☐ $\widehat{h} \in L^2(\mathbb{R})$.

7. Distributionen **[4 Punkte]**

Zeigen Sie, dass die Ableitung der als Distribution aufgefassten Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} (1-x)^2 & \text{für } x \in [0,1], \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

gleich $\delta - 2(1-x)\chi_{[0,1]}$ ist.

8. **Hilbertraum** **[6 Punkte]**

(a) Wie lautet die Definition einer Cauchy-Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im Hilbertraum $\mathcal{H}$?

(b) Sei b_n, $n \in \mathbb{N}$, eine orthonormale Folge von Vektoren im Hilbertraum $\mathcal{H}$ und α_n eine quadratsummierbare Folge komplexer Zahlen, d.i., $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$.

Man zeige: $x_n := \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k b_k$ ist eine Cauchy-Folge in $\mathcal{H}$.