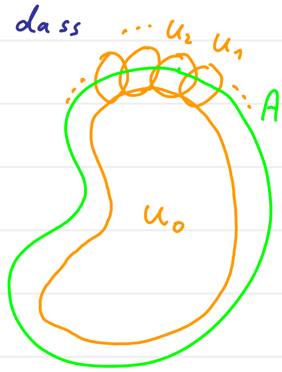
Satz: (Gauß'scher Integralsatz)

Sei: $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt mit glattem Rand und äußerem Normalenfeld $\nu : \partial A \to S^{n-1}$, $U \supseteq A$ offen und $F \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$. Dann ist

$$\boxed{\int_A \operatorname{div} F(x)\, dx = \int_{\partial A} \langle F(x), \nu(x) \rangle \, dS(x)} \qquad (*)$$

Beweis: Sei $\{U_j\}_{j=0}^N$ eine offene Überdeckung von A, so dass



$U_j \subseteq A \setminus \partial A \Rightarrow j = 0$

und $\{ \varphi_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n, [0,1]) \}_{j=0}^N$ eine $\{U_j\}$ untergeordnete Zerlegung der Eins auf A.

$F_j(x) := \varphi_j(x) F(x)$ also $\sum_{j=0}^N F_j(x) = F(x) \quad \forall x \in A$

Wir zeigen $(*)$ für jedes F_j:

(i) $j = 0$: Dann hat jede Komponente $F_{0,k}$ $k = 1, \dots, n$ kompakten Träger in U_0. Damit ist

$$\int_A \partial_k F_{0,k}(x)\, dx = 0 \quad \text{also} \quad \int_A \operatorname{div} F_0(x)\, dx = 0$$

Ebenso gilt $\int_{\partial A} \langle F_0(x), \nu(x) \rangle \, dS(x) = 0$, da $F_0\big|_{\partial A} = 0$

(ii) $j \neq 0$: Nach dem Lemma gilt für jede Komponente $F_{j,k}$

$$\int_A \partial_k F_{j,k}(x)\, dx = \int_{\partial A} F_{j,k}(x)\, \nu_k(x)\, dS(x)$$

Damit ist

$$\int_A \operatorname{div} F(x)\, dx = \sum_{j=0}^N \sum_{k=1}^n \int_A \partial_k F_{j,k}(x)\, dx = \sum_{j,k} \int_{\partial A} F_{j,k}(x) \nu_k(x)\, dS(x)$$

$$= \sum_{j=0}^N \int_{\partial A} \langle F_j(x), \nu(x) \rangle \, dS(x) = \int_{\partial A} \langle F(x), \nu(x) \rangle \, dS(x)$$

$\square$

Verallgemeinerungen: Der Satz gilt auch, wenn ∂A nicht überall glatt ist, z.B.:

- Wenn ∂A lokal als Graph einer Lipschitz-stetigen (u. damit fast überall diff.baren) Funktion f geschrieben werden kann, d.h.:

$$A \cap U = \{ (x', x_n) \in U \mid f(x') \le x_n \}$$

- Wenn die „singulären Randpunkte" in denen ∂A in keiner offenen Umgebung Graph einer C^1-Fkt. ist, eine $(n-1)$-dim. Nullmenge ist ($\to$ Königsberger)

Notation: V.a. in der Physik wird oft eine Kurzschreibweise verwendet, z.B.:

$$\int_A \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, dx = \int_{\partial A} \vec{F} \cdot d\vec{S}(x)$$

Interpretation:

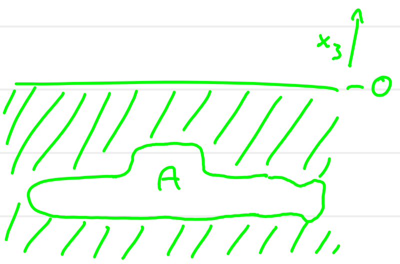
- $\int_{\partial A} \langle F(x), n(x) \rangle \, dS(x)$ ist der „<u>Fluß</u>" von F durch ∂A
(wenn F z.B. das Geschw.feld einer Flüssigkeit ist.)

- $\operatorname{div} F(x) =$ „Quellstärke" von F bei x

Anwendungsbsp. (Archimed'scher Auftrieb):

Beschreibt $A \subseteq \mathbb{R}^3$ einen in eine Flüssigkeit mit Dichte ρ eingetauchten Körper, auf den bei $x \in \partial A$ der Druck $\rho x_3 \nu(x)$ ausgeübt wird, dann ist die gesamte Auftriebskraft:

$x_3 < 0$!



$$f = \int_{\partial A} \rho x_3 \nu(x) \, dS(x) \quad \text{mit Komponenten}$$

$$f_j = \int_{\partial A} \rho x_3 \nu_j(x) \, dS(x) = \rho \int_A \frac{\partial x_3}{\partial x_j} \, dx = \begin{cases} \underbrace{\rho \operatorname{vol}(A)}_{= \text{Gewicht der verdrängten Flüssigkeit.}}, & j = 3 \\ 0 \end{cases}$$

Gauß mit $F_k = \rho x_3 \delta_{kj}$

Bemerkung: Für $n=1$ ist Gauß = HDI, denn mit $A=[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ haben wir

$$\int_a^b F'(x)\,dx = \int_A \operatorname{div} F(x)\,dx \overset{\text{„Gauß"}}{=} \underbrace{F(b)-F(a)}_{\text{„Oberflächenint." mit } \partial A=\{a,b\}}$$

Korollar: (mehr-dimensionale partielle Integration)

Sei $A\subseteq\mathbb{R}^n$ kompakt mit glattem Rand & äußerem Normalenfeld ν. Dann gilt für alle $f,h\in C^1(U,\mathbb{R})$ mit $U\supseteq A$ offen & alle $j=1,\dots,n$:

$$\boxed{\int_A h(x)\,\partial_j f(x)\,dx = \int_{\partial A} h(x)f(x)\nu_j(x)\,dS(x) - \int_A f(x)\,\partial_j h(x)\,dx}$$

Beweis: wir definieren $F\in C^1(U,\mathbb{R}^n)$, $F(x):=h(x)f(x)e_j$ wobei $e_j\in\mathbb{R}^n$ der j-te Einheitsvektor ist. Dann gilt

$$\int_A \operatorname{div} F(x)\,dx = \int_A \big(h(x)\,\partial_j f(x) + f(x)\,\partial_j h(x)\big)\,dx$$

Gauß $\longrightarrow$ ‖

$$\int_{\partial A} \langle F(x),\nu(x)\rangle\,dS(x) = \int_{\partial A} h(x)f(x)\nu_j(x)\,dS(x)$$

$\square$

Korollar: (Erste Green'sche Formel)

Sei $A\subseteq\mathbb{R}^n$ kompakt mit glattem Rand, $U\supseteq A$ offen und $g\in C^2(U,\mathbb{R})$, $f\in C^1(U,\mathbb{R})$. Dann gilt:

$$\int_{\partial A} f(x)\langle\nabla g(x),\nu(x)\rangle\,dS(x) = \int_A \langle\nabla f(x),\nabla g(x)\rangle + f(x)\Delta g(x)\,dx$$

$$\Big(\text{also } \int_{\partial A} f\,\vec\nabla g\cdot d\vec S = \int_A \vec\nabla f\cdot\vec\nabla g + f\,\Delta g\,dx\Big)$$

Beweis: setze $h(x)=\partial_j g(x)$ in der Gleichung zur mehr-dim. part. Integration und summiere über j.

$\square$

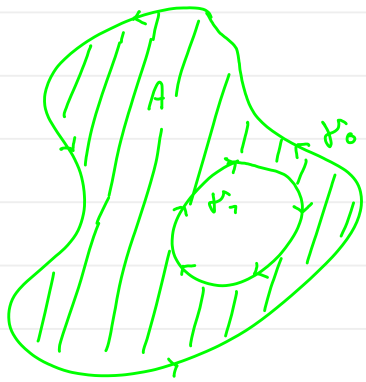
Stokes'scher Integralsatz

Wir betrachten zunächst ein beschränktes Gebiet $A \subseteq \mathbb{R}^2$ dessen Rand durch die disjunkte Vereinigung von geschl. Kurven

$$\partial A = \dot{\bigcup_{i=0}^{n}} \gamma_i([a_i,b_i]) \text{ gegeben ist, wobei}$$

$$\gamma_i \in C^1([a_i,b_i] \subseteq \mathbb{R}, \partial A), \text{ so dass}$$

alle γ_i bzgl. A in math. positiver Richtung durchlaufen werden.



Satz: (Satz von Green/Stokes für $n=2$):

Sei: $U \supseteq A$ offen und $f \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$ ein Vektorfeld mit $\operatorname{rot} f := \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 =: \nabla \times f$. Dann gilt unter obigen Annahmen:

$$\boxed{\int_A \nabla \times f(y)\, dy = \sum_{i=0}^{n} \oint_{\gamma_i} f(r) \cdot dr}$$

Beweis: Definiere $F \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$ als $F(x) := (f_2(x), -f_1(x))$. Dann ist

$$\int_A \operatorname{rot} f(x)\, dx = \int_A \operatorname{div} F(x)\, dx \overset{\text{Gauß}}{=} \int_{\partial A} \langle F(x), v(x) \rangle\, dS(x)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \int_{a_i}^{b_i} \langle F(\gamma_i(t)), v(\gamma_i(t)) \rangle \sqrt{1 + \|\dot{\gamma}_i(t)\|^2}\, dt$$

$$v(\gamma_i(t)) = \frac{(\dot{\gamma}_{i,2}(t), -\dot{\gamma}_{i,1}(t))}{(1 + \|\dot{\gamma}(t)\|^2)^{1/2}}$$

$$v(\gamma_i(t)) \perp \dot{\gamma}_i(t)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \int_{a_i}^{b_i} \langle f(\gamma_i(t)), \dot{\gamma}_i(t) \rangle\, dt$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \oint_{\gamma_i} f(r) \cdot dr \qquad \square$$

$=$ „Zirkulation von f entlang γ"