Gauß'scher Integralsatz

Def.: Eine kompakte Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ hat „glatten Rand", wenn es für jedes $a \in \partial A$ eine offene Umgebung U und $\alpha \in C^1(U, \mathbb{R})$ gibt, so dass

$$(i)\quad A \cap U = \{ x \in U \mid \alpha(x) \leq 0 \}$$

$$(ii)\quad \alpha'(x) \neq 0 \quad \forall x \in U.$$

Bsp.: Vollkugel $A = B_R(0) := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leq R \}$ hat glatten Rand.
Wir können $\alpha(x) := \|x\|_2^2 - R^2$ wählen.

Satz: Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt mit glattem Rand. Dann gilt:

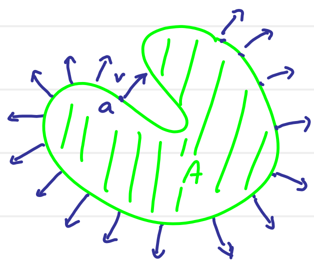
1) ∂A ist eine $\underbrace{(n-1)\text{-dim. UMF von } \mathbb{R}^n}_{=: \text{„Hyperfläche"}}$

2) Lokal kann ∂A (bis auf eine Permutation der Koordinaten) als Graph einer Funktion $f \in C^1(V \subseteq \mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R})$ dargestellt werden.

3) es gibt ein eindeutig bestimmtes Vektorfeld $v \in C(\partial A, S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n)$ mit

(i) $\forall a \in \partial A: v(a) \in N_a \partial A$

(ii) $\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta \in (0, \varepsilon): a + \delta v(a) \notin A$



(**Def.:** Wir nennen v „äußeres Normalenfeld")

(iii) Ist $\partial A \cap U = \{ (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \cap U \mid x_n = f(x') \}$

dann gilt $\boxed{v(x', x_n) = \dfrac{(-\nabla f(x')^T, 1)}{\sqrt{1 + \|\nabla f(x')\|^2}}} \quad \forall (x', x_n) \in \partial A \cap U$

Beweis: 2) folgt aus 1).

1) da A glatten Rand hat, gibt es $\alpha \in C^1(U, \mathbb{R})$ mit

$$A \cap U = \{ x \in U \mid \alpha(x) \leq 0 \}$$

und $\alpha'(x) \neq 0 \quad \forall x \in U$.

wir zeigen zunächst $\boxed{\partial A \cap U = \{ x \in U \mid \alpha(x) = 0 \}}$

"$\subseteq$" ist $x \in U$ mit $\alpha(x) < 0$, dann gilt dies auch für alle Punkte einer genügend kleinen offenen Umgebung von x. Also: $x \notin \partial A$

"$\supseteq$" ist $x \in U$ mit $\alpha(x) = 0$, $\nabla\alpha(x) \neq 0$

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \alpha(x + t\nabla\alpha(x)) = \underbrace{\alpha(x)}_{=0} + t\|\nabla\alpha(x)\|^2 + o(t)$$

wechselt bei $t=0$ das Vorzeichen. Somit enthält jede Umgebung von x Punkte innerhalb & außerhalb von A. Also ist $x \in \partial A$.

Da ∂A lokal Nullstellenmenge einer regulären (d.h. $\alpha' \neq 0$) C^1-Funktion ist, ist ∂A C^1-UMF von $\mathbb{R}^n$.

3) $\nu(a) := \dfrac{\nabla\alpha(a)^T}{\|\nabla\alpha(a)\|}$ erfüllt $\nu \in C(\partial A, S^{n-1})$ und

(i) $\nu(a) \in N_a\partial A$, da $N_a\partial A = \operatorname{span}\{\nabla\alpha(a)\}$,

(ii) $\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta \in (0, \varepsilon) \ a + \delta\nu(a) \notin A$, da

$$\alpha(a + \delta\nu(a)) = \underbrace{\alpha(a)}_{=0} + \delta\|\nabla\alpha(a)\| + o(\delta)$$

> 0 für hinreichend kleines δ

(iii) Wähle $\alpha(x', x_n) := x_n - f(x')$ bei $a = (x', x_n) \in \partial A$.

Dann ist $\nabla\alpha(a) = \begin{pmatrix} -\nabla f(x') \\ 1 \end{pmatrix}$.

Eindeutigkeit von ν folgt aus $\dim(N_a\partial A) = 1$. $\square$

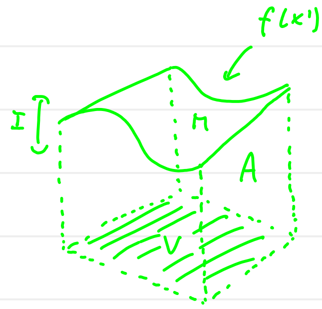
Bemerkung: • Ein stetiges Normalenfeld $\nu \in C(M \subseteq \mathbb{R}^n, S^{n-1})$ mit $\nu(x) \in N_x M$ existiert nicht für jede $n-1$ dim. UMF. (Bsp.: Möbiusband)

Die wesentliche Zutat zum Beweis des Gauß'schen Integralsatzes ist:

Lemma: Sei $V \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ offen, $I := (c,d) \subseteq \mathbb{R}$, $f \in C^1(V, I)$,

$$A := \{ (x', x_n) \in V \times I \mid x_n \leq f(x') \},$$

$$M := \{ (x', x_n) \in V \times I \mid x_n = f(x') \},$$



und $\nu \in C(M, S^{n-1})$ ein aus A hinaus zeigendes Normalenfeld.

Dann gilt für jede Fkt. $F \in C^1(V \times I, \mathbb{R}) \cap C(\overline{V \times I}, \mathbb{R})$ mit kompaktem Träger in $V \times I$ & alle $\forall j \in \{1, \dots, n\}$:

$$\int_A \partial_j F(x)\, dx = \int_M F(a)\, \nu_j(a)\, dS(a)$$

Beweis: zunächst $j < n$:

$$\partial_j \int_c^{f(x')} F(x', x_n)\, dx_n \overset{(*)}{=} F(x', f(x'))\, \partial_j f(x') + \int_c^{f(x')} \partial_j F(x', x_n)\, dx_n$$

definiere $\varphi(y', x') := \int_c^{f(y')} F(x', x_n)\, dx_n$

dann ist $\partial_j \int_c^{f(x')} F(x', x_n)\, dx_n = \frac{\partial}{\partial y_j} \varphi(x', x') + \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi(x', x') = \dots$

$$\int_A \partial_j F(x)\,dx \overset{\text{Fubini}}{=} \int_V \left(\int_c^{f(x')} \partial_j F(x', x_n)\, dx_n \right) dx'$$

$$\overset{(*)}{=} \underbrace{\int_V \partial_j \underbrace{\left(\int_c^{f(x')} F(x', x_n)\, dx_n \right)}_{=: G(x')} dx'}_{=0} - \int_V F(x', f(x'))\, \partial_j f(x')\, dx'$$

$$= 0 - \int_V F(x', f(x'))\, \partial_j f(x')\, dx'$$

$$\int_V \partial_j G(x')\, dx' = \int_{[-r,r]^{n-1}} \partial_j G(x')\, dx' = \int_{[-r,r]^{n-2}} \left(\int_{-r}^{r} \partial_j G(x')\, dx_j \right) d(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n-1})$$

mit r, so dass $V \subseteq [-r,r]^{n-1}$ und G mit Null zu $G \in C^1([-r,r]^{n-1}, \mathbb{R})$ fortgesetzt.

$= 0$ da $G \in C^1(V, \mathbb{R})$ kompakten Träger in V hat

$$= \int_M F(x)\, \nu_j(x)\, dS(x)$$

da $\nu_j(x) = -\dfrac{\partial_j f(x')}{\sqrt{1 + \|\nabla f(x')\|^2}}$ und $\sqrt{g(x')} = \sqrt{1 + \|\nabla f(x')\|^2}$.

nun $j = n$:

$$\int_A \partial_n F(x)\, dx = \int_V \int_c^{f(x')} \partial_n F(x', x_n)\, dx_n\, dx'$$

$$= \int_V \Big(F(x', f(x')) - \underbrace{F(x', c)}_{=0 \text{ da } \operatorname{supp}(F) \text{ kompakt in } V \times I} \Big)\, dx'$$

$$= \int_M F(x)\, \nu_n(x)\, dS(x)$$

$\nu_n(x) = (1 + \|\nabla f(x')\|^2)^{-\frac{1}{2}}$ & $\sqrt{g(x')} = \sqrt{1 + \|\nabla f(x')\|^2}$