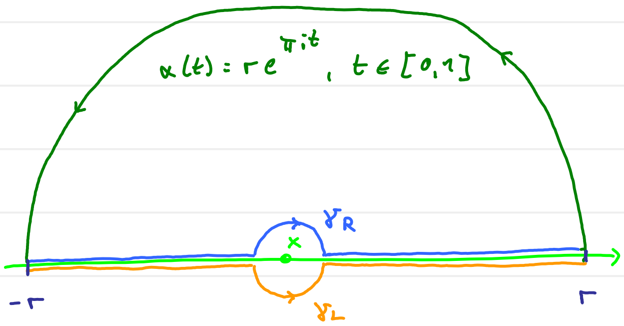
Kramers-Kronig Relationen

Satz: Sei: $U \supseteq \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geq 0\}$ offen, $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph und so, dass

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists R > 0 \; \forall z \in \mathbb{C}: \; (\operatorname{Im} z \geq 0 \wedge |z| > R) \Rightarrow |f(z)| < \varepsilon \quad \left(\text{d.h. } \lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = 0 \text{ genügt}\right)$$

Dann gilt $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{Re} f(x) &= \frac{1}{\pi} \mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} f(x')}{x'-x}\, dx' \\ \operatorname{Im} f(x) &= -\frac{1}{\pi} \mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} f(x')}{x'-x}\, dx' . \end{aligned}}$$



Beweis: Wähle $r > |x|$. Dann ist

$$\left| \int_\alpha \frac{f(z)}{z-x}\, dz \right| \leq \int_0^1 \pi \underbrace{|f(re^{\pi i t})|}_{\xrightarrow{r\to\infty} 0} \underbrace{\frac{r}{|re^{\pi i t} - x|}}_{\text{beschränkt für } r\to\infty} dt \xrightarrow{r\to\infty} 0$$

Aus dem Residuensatz folgt dann

$$\left.\begin{aligned} &\bullet \int_{\gamma_R + \alpha} \frac{f(z)}{z-x}\, dz = 0 \\ &\bullet \int_{\gamma_L + \alpha} \frac{f(z)}{z-x}\, dz = 2\pi i\, f(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x')}{x'-x}\, dx = \pi i\, f(x) \quad (*)$$

Cauchy Hauptwert = Prinzipalwert

Behauptung folgt durch Vergleichen von Re-/Im.teilen in $(*)$. $\square$

Bemerkung: Anwendung & Interpretation in der E-Dynamik: Dispersionsrelationen

$\Rightarrow$ Medien sind nur dann dispersiv (= frequenzabh. Phasengeschw.) wenn sie auch absorptiv sind ...

Harmonische Funktionen & Dirichlet-Probleme

Erinnerung:
- $f \in C^2(V,\mathbb{R})$ heißt „harmonisch" auf $V \subseteq \mathbb{R}^n$ wenn $\forall x \in V$:
  $$\Delta f(x) := \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 f(x) = 0.$$
- Ist $f(x+iy) = u(x,y) + i v(x,y)$ holomorph auf $U = \{x+iy \mid (x,y) \in V\}$, dann sind u & v harmonisch auf V.
- $f : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ heißt harmonisch, wenn $(x,y) \mapsto f(x+iy)$ dies ist.

Satz: Sei $V \subseteq \mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend und $u \in C^2(V,\mathbb{R})$ harmonisch. Dann ist u der Realteil einer auf $U := \{x+iy \mid (x,y) \in V\}$ holomorphen Funktion.

Beweis: der Einfachheit halber nur für $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$, $z_0 = x_0 + iy_0$:

Definiere $v(x,y) := \int_{y_0}^{y} \partial_x u(x,t)\, dt - \int_{x_0}^{x} \partial_y u(t,y_0)\, dt$. Dann ist

$$\partial_x v(x,y) = -\int_{y_0}^{y} \partial_y^2 u(x,t)\, dt - \partial_y u(x,y_0)$$

$$= \underbrace{-\partial_y u(x,y) + \partial_y u(x,y_0)} - \partial_y u(x,y_0) = -\partial_y u(x,y) \quad \text{und}$$

$\partial_y v(x,y) = \partial_x u(x,y)$ womit die CR. Gleichungen erfüllt sind. $\square$

Lemma: Ist $u : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ harmonisch und $f : U' \subseteq \mathbb{C} \to U$ holomorph, dann ist $u \circ f : U' \to \mathbb{R}$ harmonisch.

Beweis: $\to$ Übung

Korollar: (Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen)

Ist u harmonisch in einem Gebiet $U \supseteq \{z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| \leq r\}$, dann gilt:

$$\boxed{u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it})\, dt}$$

Beweis: $u = \operatorname{Re} f$ wobei f holomorph auf U ist. Die Mittelwerteigenschaft von u folgt dann aus der für f. □

Bemerkung: Auch die Umkehrung gilt. D.h. $u \in C(U)$ erfüllt Mittelwerteig. $\Rightarrow$ u harmonisch

Satz: (Poissonsche Integralformel) Sei $U := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ und $u \in C(\overline{U}, \mathbb{R})$ harmonisch auf U. Dann gilt $\forall z \in U$:

$$\boxed{u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \frac{1-|z|^2}{|1-\bar{z}e^{it}|^2}\, dt}$$

Beweisskizze: Definiere $w(z) := \dfrac{z-\xi}{1-\bar{\xi}z}$ für $|\xi| < 1$. Dann gilt $w(U) = U$,

und $z(w) := \dfrac{w+\xi}{1+\bar{\xi}w}$ ist Umkehrabb. von w auf $\overline{U}$.

Außerdem ist $w(e^{it}) = \dfrac{e^{it}-\xi}{1-\bar{\xi}e^{it}} = \dfrac{1-\xi e^{-it}}{1-\bar{\xi}e^{it}} e^{it} =: e^{is}$,

also $w : \partial U \to \partial U$,

$$u(\xi) = u \circ \underbrace{z(0)}_{=\xi} \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u \circ z(e^{is})\, ds$$

Lemma & Mittelwerteigenschaft

$$\underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \frac{1-|\xi|^2}{|1-\bar{\xi}e^{it}|^2}\, dt$$

Substitution $e^{is} \overset{!}{=} w(e^{it})$ & Verwendung von $w = z^{-1}$.

□

Bemerkung: • Für $r \in [0,1)$ und $\theta \in \mathbb{R}$ ist der „Poissonkern" definiert als

$$P_r(\theta) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in\theta} \quad \text{und es gilt}$$

$$= \operatorname{Re}\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2} \quad \text{sowie}$$

$$\frac{1-|\xi|^2}{|1-\bar{\xi}e^{it}|^2} \overset{\xi := re^{i\theta}}{=} P_r(\theta - t)$$

• Der Poissonkern ist C^∞ & harmonisch auf $\mathcal{U}$.

Korollar: (Dirichlet Problem für die Kreisscheibe)

Ist eine stetige, 2π-periodische Funktion $\theta \mapsto f(\theta)$ gegeben, dann gibt es genau eine in $\mathcal{U} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ harmonische und auf $\bar{\mathcal{U}}$ stetige Funktion $u : \bar{\mathcal{U}} \to \mathbb{R}$ für die $u(e^{i\theta}) = f(\theta) \ \forall \theta$.

Beweisskizze:

(i) Existenz:

Setze $u(re^{i\theta}) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) f(t)\, dt & \text{für } r < 1 \\ f(\theta) & \text{für } r = 1 \end{cases}$

Da P_r C^∞ & f stetig ist, dürfen wir Δ mit $\int_0^{2\pi}$ vertauschen, so dass $\Delta P = 0 \Rightarrow \Delta u = 0$. u ist also harmonisch in $\mathcal{U}$. Außerdem läßt sich verifizieren, dass $\lim_{r\to 1} u(re^{i\theta}) = f(\theta)$ also $u \in C(\bar{\mathcal{U}})$.

(ii) Eindeutigkeit: Sind u_1 & u_2 Lösungen, dann ist $u := u_1 - u_2$ harmonisch mit $u|_{\partial\mathcal{U}} = 0$. Nach der Poisson'schen Integralform ist dann aber $u = 0$.

$\square$