Definition Residuum:

$$\boxed{\mathrm{Res}_z(f) := \frac{1}{2\pi i} \oint f(\xi)\,d\xi = c_{-1}}$$

Residuumsatz ⇒

$$\boxed{\oint_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}_{z_j}(f)}$$

↑ von γ eingeschlossene isolierte Singularitäten

Berechnung von Residuen:

- Wenn f bei z_0 einen Pol der Ordnung $n \le k$ hat:

$$\boxed{\mathrm{Res}_{z_0}(f) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{(k-1)}}{dz^{(k-1)}} \left((z-z_0)^k f(z) \right)} \quad (*)$$

- Sind g, h bei z_0 holomorph mit $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) \neq 0$.
  Dann gilt für $f(z) := \frac{g(z)}{h(z)}$:

$$\boxed{\mathrm{Res}_{z_0}(f) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}}$$

Beispiele:

- $f(z) = (1+z^4)^{-1}$ hat 4 einfache Pole bei $z_k = e^{i\frac{\pi}{4}(2k+1)}$, $k \in \{0,1,2,3\}$

  $h'(z_k) = 4 z_k^3 \Rightarrow \mathrm{Res}_{z_k}(f) = \frac{1}{4} z_k^{-3}$

- $f(z) = \frac{1}{\sin(z)}$ hat einfache Pole bei $z_n = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ da

  $z \mapsto \sin z$ dort einfache Nullstellen besitzt.

$$\mathrm{Res}_{z_n}(f) = \lim_{z\to z_n} \frac{z-z_n}{\sin(z)} = \frac{1}{\sin'(z_n)} = \frac{1}{\cos(z_n)} = (-1)^n .$$

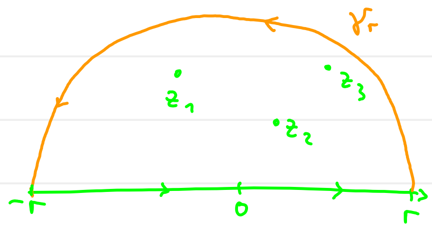
Berechnung bestimmter ℝ-Integrale mit Hilfe des Residuensatzes

Satz: Sei $U \supseteq \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geq 0\}$ offen und $f : U \setminus \{z_1, \dots, z_n\} \to \mathbb{C}$ holomorph wobei $\operatorname{Im} z_k > 0 \ \forall k$. Ist zudem $\lim\limits_{|z| \to \infty} z f(z) = 0$, dann ist

$$\boxed{\lim_{r \to \infty} \int_{-r}^{r} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{z_k}(f)}$$

Beweis: Mit $\gamma_r(t) := r e^{\pi i t}$, $t \in [0,1]$ und $r > 0$ hinreichend groß, gilt nach dem Residuensatz:

$$\int_{-r}^{r} f(x)\, dx + \int_{\gamma_r} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{z_k}(f)$$



Außerdem $$\left| \int_{\gamma_r} f(z)\, dz \right| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Standardabschätzung}}}{\leq} \pi r \sup_{z \in \gamma_r} |f(z)| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Annahme } \lim\limits_{|z|\to\infty} z f(z) = 0}}{\longrightarrow} 0 \quad \text{für } r \to \infty$$

∎

Bsp.: $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$ hat in der oberen Halbebene zwei einfache Pole z_0, z_1.

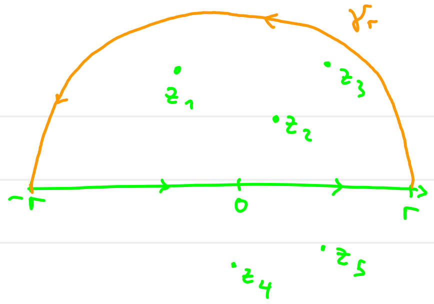
$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\, dx = 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z_0}(f) + \operatorname{Res}_{z_1}(f) \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Satz: (Fourierintegrale von rationalen Funktionen)

Sind P und Q Polynome, so dass $\operatorname{Grad} Q > \operatorname{Grad} P$ und die Nullstellen $\{z_1, \dots, z_n\}$ von Q nicht auf der reellen Achse liegen. Dann gilt für $\alpha > 0$:

$$\boxed{\lim_{r \to \infty} \int_{-r}^{r} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x}\, dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_j > 0} \operatorname{Res}_{z_j}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z} \right)}$$

Beweis: Für $\gamma_r(t) = r e^{\pi i t}$, $t \in [0,1]$ gilt:



$$\left| \int_{\gamma_r} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z} \, dz \right|$$

$$= \left| \int_0^1 \frac{P(re^{\pi i t})}{Q(re^{\pi i t})} e^{i\alpha r e^{\pi i t}} \, r \pi e^{\pi i t} \, dt \right|$$

$e^{iz} = e^{i \operatorname{Re} z} e^{-\operatorname{Im} z}$, $\operatorname{Im}\left(\alpha r e^{\pi i t}\right) = \alpha r \sin(\pi t)$

$$\le \pi \int_0^1 \underbrace{\frac{r|P(re^{\pi i t})|}{|Q(re^{\pi i t})|}}_{\substack{\text{beschränkt} \\ \text{für } r \to \infty}} \underbrace{e^{-\alpha r \sin(\pi t)}}_{\substack{\xrightarrow{r\to\infty} 0 \\ \text{für } t \in (0,1)}} \, dt \longrightarrow 0$$

Die Behauptung folgt damit aus dem Residuensatz. $\square$

Bsp.:

$$\int_0^\infty \underbrace{\frac{\cos(x)}{x^2+1}}_{f(x) = -f(x)} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+1} dx$$

Bemerkung: auf dem Halbkreisbogen γ_r würde der Integrand divergieren.

daher verwenden wir $\cos(x) = \operatorname{Re}(e^{ix})$.

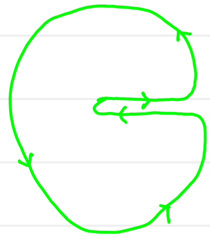
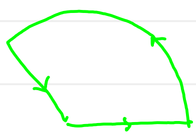
$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left(2\pi i \operatorname{Res}_i \left(\frac{e^{iz}}{z^2+1} \right) \right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{2e}}}$$

Pole erster Ordnung bei $\pm i$

$$\operatorname{Res}_i \left(\frac{e^{ix}}{x^2+1} \right) = (z-i) \frac{e^{iz}}{(z-i)(z+i)} \Bigg|_{z=i} = \frac{e^{-1}}{2i}$$

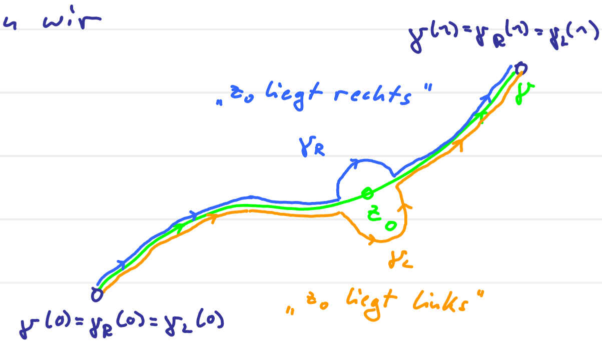
Bemerkung: auch andere Integrationswege können sinnvoll/notwendig sein, z.B. wenn Pole auf der reellen Achse liegen (siehe z.B. Jänich)

z.B.

Pole auf der Kontur

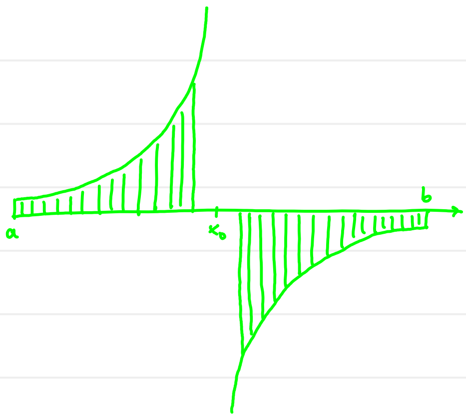
Def.: Ist f holomorph auf $U \setminus \{z_0\} \subseteq \mathbb{C}$ und $z_0 \in \gamma((0,1))$ eine isolierte Singularität, die auf der Kurve $\gamma : [0,1] \to U$ liegt. Dann definieren wir



- $\mathcal{L}\int_\gamma f(z)\,dz := \int_{\gamma_L} f(z)\,dz$ „Linkswert"
- $\mathcal{R}\int_\gamma f(z)\,dz := \int_{\gamma_R} f(z)\,dz$ „Rechtswert"
- $\mathcal{P}\int_\gamma f(z)\,dz := \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\int_\gamma f(z)\,dz + \mathcal{R}\int_\gamma f(z)\,dz\right)$ „Prinzipalwert" oder (funktionentheoret.) Hauptwert

Bemerkung: Wegen $\mathcal{L}\int_\gamma f(z)\,dz - \mathcal{R}\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}_{z_0}(f)$ gilt

$$\mathcal{P}\int_\gamma f(z)\,dz = \mathcal{R}\int_\gamma f(z)\,dz + \pi i \,\mathrm{Res}_{z_0}(f).$$



Def.: Für $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $x_0 \in (a,b)$ heißt

$$\mathcal{P}\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_a^{x_0-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_0+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

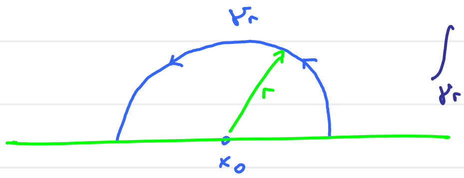
„Cauchy'scher Hauptwert" (falls der Limes existiert).

Satz: Ist $x_0 \in (a,b) \subseteq \mathbb{R}$ und f holomorph auf $[a,b] \setminus \{x_0\}$ mit einfachem Pol bei x_0 und $\gamma(t) := tb + (1-t)a$, $t \in [0,1]$. Dann gilt

$$\boxed{\mathcal{P}\int_\gamma f(z)\,dz = \mathcal{P}\int_a^b f(x)\,dx}$$

Prinzipalwert = Cauchy'scher Hauptwert

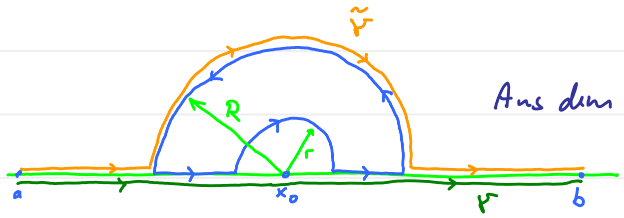
Beweis: einfacher Pol $\Rightarrow f(z) =: \frac{g(z)}{(z-x_0)}$ wobei g holomorph auf $[a,b]$ ist.



$$\int_{\gamma_r} f(z)\,dz = \underbrace{\int_{\gamma_r} \frac{g(z)-g(x_0)}{z-x_0}\,dz}_{} + \int_{\gamma_r} \frac{g(x_0)}{z-x_0}\,dz$$

$$\xrightarrow{r\to 0} 0 + \int_0^{\pi} \frac{g(x_0)}{re^{it}}\, ire^{it}\,dt = \pi i\, g(x_0)$$

$$= \pi i \operatorname{Res}_{x_0}(f).$$



Aus dem Cauchy'schen Integralsatz folgt wenn $0 < r < R$ hinreichend klein sind:

$$\Rightarrow \int_{x_0-R}^{x_0-r} f(x)\,dx - \int_{\gamma_r} f(z)\,dz + \int_{x_0+r}^{x_0+R} f(x)\,dx + \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 0$$

Also

$$\int_a^{x_0-r} f(x)\,dx + \int_{x_0+r}^{b} f(x)\,dx = \underbrace{\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,dz}_{\Re\int_{\gamma} f(z)\,dz} + \underbrace{\int_{\gamma_r} f(z)\,dz}_{\xrightarrow{r\to 0} \pi i \operatorname{Res}_{x_0}(f)} \xrightarrow{r\to 0} \Re \int_{\gamma} f(z)\,dz$$

□