# Laurentreihen

**Motivation:** Verallgemeinerung von Potenzreihen um holomorphe Fkt.en in der Nähe von isolierten Singularitäten beschreiben zu können.

**Def.:** Für Koeffizienten $c \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ und $z, z_0 \in \mathbb{C}$ heißen die Reihen

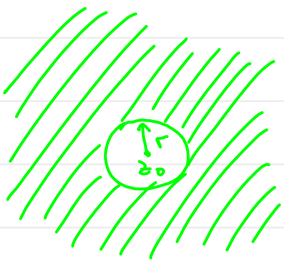
$H := \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-z_0)^{-n}$ & $N := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ „Haupt-“ und „Nebenteil“ der „Laurentreihe“

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z-z_0)^n := H + N$$

Diese heißt (absolut, gleichmäßig, ...) Konvergent, falls dies für $H$ und $N$ zutrifft.

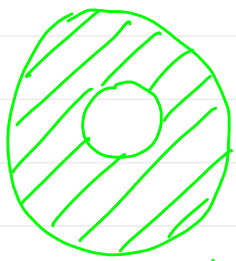
**Bemerkung:** Ist $\frac{1}{r} \in [0,\infty]$ Konvergenzradius von $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^n$ und $R \in [0,\infty]$ Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, dann

konvergiert die Laurentreihe auf dem Kreisring $K_{r,R}(z_0) := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| \in (r,R) \}$ und ist dort holomorph.




Hauptteil Konvergiert


Nebenteil Konvergiert



Laurentreihe Konvergiert

**Lemma:** Konvergiert $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z-z_0)^n$ auf $K_{r,R}(z_0)$, dann gilt für $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto z_0 + \rho e^{2\pi i t}$ falls $\rho \in (r,R)$:

$$(*) \qquad \boxed{c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz} \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

**Beweis:**

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \oint_\gamma (z-z_0)^{k-n-1}\, dz$$

gleichm. Konvergenz

$$= \sum_k c_k \int_0^1 \left(\rho e^{2\pi i t}\right)^{k-n-1} 2\pi i \rho e^{2\pi i t}\, dt = 2\pi i \sum_k c_k \underbrace{\int_0^1 \left(\rho e^{2\pi i t}\right)^{k-n} dt}_{\delta_{k,n}}$$

$$= 2\pi i\, c_n$$

□

**Satz:** (Laurentreihenentwicklung)

Ist $f : K_{r,R}(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph, dann gilt

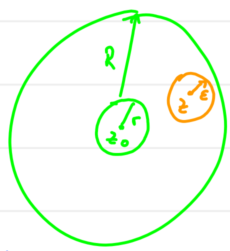
$$\boxed{f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z-z_0)^n} \quad \text{mit } c_n \text{ wie in } (*).$$

**Beweis:** Sei $\gamma : [0,1] \to K_{r,R}(z_0)$, $\gamma(t) = z + \varepsilon e^{2\pi i t}$ mit $\varepsilon > 0$.

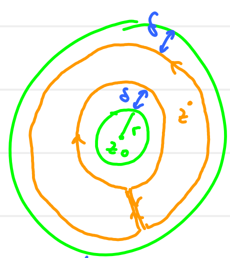
Nach dem Cauchyschen Integralsatz gilt dann

Umlauf gegen Uhrz.

$$2\pi i f(z) = \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \oint_{|\zeta - z_0| = R-\delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \oint_{|\zeta - z_0| = r+\delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$




frei homotop zu




$$= \oint_{|\zeta - z_0| = R-\delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left( \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta - z_0}} \right) d\zeta + \frac{1}{z - z_0} \oint_{|\zeta - z_0| = r+\delta} f(\zeta) \left( \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} \right) d\zeta$$

Einsetzen der geometrischen Reihen + termweise Integration

$\to$ Laurentreihe. □

**Bemerkung:** Ist $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z-z_0)^n$ auf $K_{0,r}(z_0)$, $r>0$ mit isolierter Singularität bei $z_0$, dann gilt:

$z_0$ ist hebbar $\Leftrightarrow$ Hauptteil verschwindet

$z_0$ ist Pol n'ter Ordnung $\Leftrightarrow$ Hauptteil bricht ab mit $c_{-n} \neq 0$ und $c_{-k} = 0 \ \forall k > n$

$z_0$ ist wesentl. $\Leftrightarrow$ Hauptteil bricht nicht ab

**Bsp.e:**

- $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)} = \dfrac{1}{z-1} - \dfrac{1}{z}$

Partialbruchzerlegung:

Ansatz $\dfrac{1}{z(z-1)} = \dfrac{a_1}{z} + \dfrac{a_2}{z-1}$

$1 = (z-1)a_1 + z a_2$

Koeffizientenvergleich: $a_1 = -1$

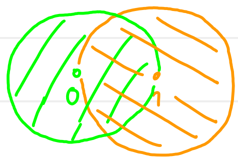
$a_1 + a_2 = 0$

$= -\frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ auf $K_{0,1}(0)$

$= \frac{1}{z-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (1-z)^n$ auf $K_{0,1}(1)$

$-\frac{1}{z} = -\frac{1}{1-(1-z)} = -\sum_{n=0}^{\infty} (1-z)^n$

$K_{0,1}(0)$




$K_{0,1}(1)$

Pole erster Ordnung bei 0 & 1 spiegeln sich wider durch $c_{-1} \neq 0$ und $c_{-n} = 0 \ \forall n > 1$.

- $f(z) = e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}$ auf $K_{0,\infty}(0)$

wesentliche Singularität bei $0 \Leftrightarrow$ Hauptteil bricht nicht ab.

**Lemma:** Konvergiert $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z-z_0)^n =: f(z)$ auf $K_{r,R}(z_0)$ mit $r<R$, dann gilt: $c_{-1} = 0 \Rightarrow f$ besitzt auf $K_{r,R}(z_0)$ eine Stammfkt.

**Beweis:** $F(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\}} \frac{c_n}{n+1} (z-z_0)^{n+1} \Rightarrow F' = f$ $\square$

# Residuenkalkül

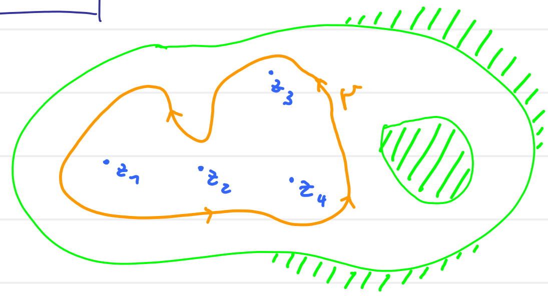
**Def.:** Sei $f: k_{0,R}(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph, $\gamma(t) := z_0 + \rho e^{2\pi i t}$, $t \in [0,1]$ und $\rho \in (0, R)$.

$$\boxed{\operatorname{Res}_{z_0}(f) := \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z)\, dz}$$

heißt das „<u>Residuum</u>" von $f$ bei $z_0$.

Aus dem Satz über die Laurentreihenentw. folgt dann:

**Korollar:** $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n \Rightarrow \boxed{\operatorname{Res}_{z_0}(f) = c_{-1}}$



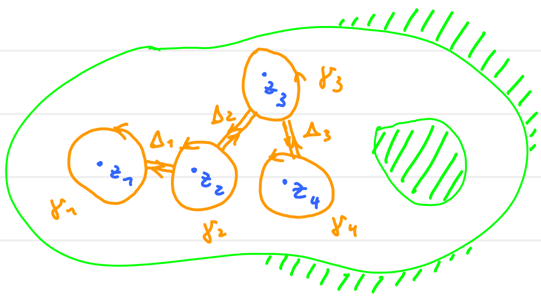

**Satz:** (Residuensatz)

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $S := \{z_1, \dots, z_n\} \subseteq U$ und $\gamma: [0,1] \to U \setminus S$ eine geschlossene Kurve ohne Überschneidungen, die in $U$ null-homotop ist und $S$ gegen den Uhrzeigersinn einmal umkreist.

Dann gilt für jede holomorphe Fkt. $f: U \setminus S \to \mathbb{C}$:

$$\boxed{\oint_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}_{z_j}(f)}$$

**Beweis:** Ersetze $\gamma$ durch eine dazu frei homotope Kurve $\tilde{\gamma}$:




$$„\gamma \approx \tilde{\gamma} = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \gamma_j}_{\text{Kreis um } z_j} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n-1} \Delta_j - \sum_{j=1}^{n-1} \Delta_j}_{\text{Verbindungswege heben sich weg}}\text{"}$$

Damit ist $\displaystyle \oint_\gamma f(z)\, dz = \oint_{\tilde{\gamma}} f(z)\, dz = \sum_{j=1}^{n} \oint_{\gamma_j} f(z)\, dz = \sum_{j=1}^{n} 2\pi i \operatorname{Res}_{z_j}(f)$

$\square$

Berechnung von Residuen:

- Wenn $f$ bei $z_0$ einen Pol der Ordnung $n \leq k$ hat, dann besitzt $z \mapsto (z-z_0)^k f(z)$ um $z_0$ eine Potenzreihenentwicklung $(z-z_0)^k f(z) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l (z-z_0)^l$ und es gilt $\mathrm{Res}_{z_0}(f) = a_{k-1}$. Also gilt

$$\boxed{\mathrm{Res}_{z_0}(f) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{(k-1)}}{dz^{(k-1)}} \left( (z-z_0)^k f(z) \right)} \qquad (*)$$

- Sind $g, h$ bei $z_0$ holomorph mit $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) \neq 0$. Dann gilt für $f(z) := \frac{g(z)}{h(z)}$:

$$\boxed{\mathrm{Res}_{z_0}(f) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}}$$

da wegen $(*)$: $\mathrm{Res}_{z_0}(f) = \lim_{z \to z_0} \left( (z-z_0) \frac{g(z)}{h(z)} \right)$

$$= g(z_0) \lim_{z \to z_0} \frac{(z-z_0)}{h(z)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Beispiele:

- $f(z) = (1+z^4)^{-1}$ hat 4 einfache Pole bei $z_k = e^{i\frac{\pi}{4}(2k+1)}$, $k \in \{0,1,2,3\}$

$h'(z_k) = 4 z_k^3 \Rightarrow \mathrm{Res}_{z_k}(f) = \frac{1}{4} z_k^{-3}$

- $f(z) = \frac{1}{\sin(z)}$ hat einfache Pole bei $z_n = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ da $z \mapsto \sin z$ dort einfache Nullstellen besitzt.

$\mathrm{Res}_{z_n}(f) = \frac{1}{\cos(z_n)} = (-1)^n$