Def.: (Faltung) Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ heißt $f * g$ definiert durch

$$\boxed{(f*g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, dy}$$

die „Faltung" von f und g.

Bemerkungen:

- Anwendungen in der Signalverarbeitung (z.B. Filter in dig. Bildbearbeitung oder dig. Hall-/Echoeffekte in der Akustik)

- Das Produkt zweier L^1-Funktionen ist nicht notwendigerweise wieder L^1 (Bsp.: $f(x) = \begin{cases} x^{-1/2}, & x \in (0,1) \\ 0 \end{cases}$, $f \in L^1$ aber $f^2 \notin L^1$), d.h. $f * g$ ist nicht immer überall definiert.

  Allerdings ist mit $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ auch $(x,y) \mapsto f(x)\, g(y)$ integrierbar in $\mathbb{R}^{2n}$, so dass mit der Transformation $(x,y) \mapsto (x-y, y)$ folgt

  $$\int_{\mathbb{R}^{2n}} |f(x-y)\, g(y)|\, d(x,y) < \infty.$$

  Aus dem Satz von Fubini folgt damit:

Lemma: Sind $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ dann gilt $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $x \mapsto f*g(x)$ ist fast überall definiert.

Korollar: (Eigenschaften der Faltung) Sind $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ dann gilt:

(i)	$f * g = g * f$	Kommutativität
(ii)	$(f*g)*h = f*(g*h)$	Assoziativität
(iii)	$f*(g+h) = f*g + f*h$	Distributivität
(iv)	$\|f*g\|_1 \le \|f\|_1 \, \|g\|_1$	d.h. $*: L^1 \times L^1 \to L^1$ definiert ein „Produkt" auf L^1 & macht daraus eine „Banach-Algebra"

Beweis: Übung $\square$

Satz: (F.T. der Faltung) Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\boxed{\widehat{f * g} = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\, \hat{f} \cdot \hat{g}}$$

Beweis: $\widehat{f*g}(k) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \iint f(x-y)\, g(y)\, dy\, e^{-ik\cdot x}\, dx$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int \underbrace{\int f(x-y)\, e^{-ikx}\, dx}_{(2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-ik\cdot y} \hat{f}(k)}\, g(y)\, dy = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{f}(k)\, \hat{g}(k)$$

$\square$

Def.: (inverse Fouriertransformierte)

Für $F \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist die „inverse Fouriertransformierte" definiert durch

$$\boxed{\check{F}(x) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ik\cdot x} F(k)\, dk} \qquad \text{also} \quad \check{F}(x) = \hat{F}(-x)$$

Lemma: Sei $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt $\forall x \in \mathbb{R}^n$:

$$\lim_{l\to\infty} f * \delta_l(x) = \check{\hat{f}}(x) \quad \text{für } \delta_l(x) := \left(\frac{l}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{l^2\|x\|^2}{2}}, \; l \in \mathbb{N}.$$

Beweis: Wegen $\hat{\delta}_1 = \delta_1$ gilt $\delta_l(x) = l^n \delta_1(lx) = l^n \hat{\delta}_1(lx) = l^n \hat{\delta}_1(-lx)$,

also $$\delta_l(x) = \left(\frac{l}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{ilk\cdot x}\, e^{-\frac{1}{2}\|k\|^2}\, dk$$

$$\overset{\xi := lk}{=} (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi\cdot x}\, e^{-\frac{\|\xi\|^2}{2l^2}}\, d\xi$$

$$\Rightarrow \quad f * \delta_L(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, \delta_L(x-y)\, dy$$

$$= (2\pi)^{-n} \int f(y) \left(\int e^{i\xi\cdot(x-y)}\, e^{-\frac{\|\xi\|^2}{2L^2}}\, d\xi \right) dy$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int \underbrace{\hat{f}(\xi)\, e^{i\xi\cdot x - \frac{\|\xi\|^2}{2L^2}}}_{=:g_L(\xi)}\, d\xi$$

Da $|g_n(x)| \leq |\hat{f}(\xi)|$ und $\hat{f} \in L^1$, greift der Satz über majorisierte Konvergenz, so dass $\lim\limits_{L\to\infty} f * \delta_L(x) = \check{\hat{f}}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ $\square$

<u>Satz:</u> (Umkehrsatz) Sind $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dann gilt für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$\boxed{\check{\hat{f}}(x) = f(x)}.$$

<u>Beweisidee:</u> ($\rightarrow$ Königsberger)

- nach dem Lemma gilt $f * \delta_L \to \check{\hat{f}}$ für $L \to \infty$
- da die δ_L eine „Dirac-Folge" bilden, gilt außerdem

$$f * \delta_L \to f \quad \text{fast überall.} \qquad \square$$

<u>Bemerkung:</u> Ist f stetig bei x, dann gilt $\check{\hat{f}}(x) = f(x)$ also $\hat{\hat{f}}(x) = f(-x)$.

Ein paar Anwendungen ...

Satz (Shannon-Nyquist Abtasttheorem):

Sei $\Omega > 0$ & $f \in L^1(\mathbb{R})$ so, dass $|k| \geq 2\pi\Omega \Rightarrow \hat{f}(k) = 0$.

Dann kann f aus den Werten $f(nT)$, $n \in \mathbb{Z}$ rekonstruiert werden, wenn $\boxed{T < \frac{1}{2\Omega}}$ und dann gilt

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\,\mathrm{sinc}\left(\pi\left(n - \frac{x}{T}\right)\right)} \qquad \text{wobei } \mathrm{sinc}(x) := \frac{\sin(x)}{x}$$

(D.h. „Abtastfrequenz" sollte > 2 mal max. Frequenz im Signal sein.
Bsp.: CD, DVD, MP3 Audio-Standard = 44,1 kHz)

Beweis: Da $f \in C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ und $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ gilt nach dem Umkehrsatz

$$f(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \hat{f}(k)\, e^{ikx}\, dk \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$= (2\pi)^{-1/2} \frac{1}{T} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\hat{f}\left(\frac{k}{T}\right)}_{=:F(k)} \underbrace{e^{i\frac{k}{T}x}}_{=:\overline{G(k)}} dk \quad \text{jeweils } 2\pi\text{-periodisch}$$

Parseval (-> 1. Semester)

$$\overset{\downarrow}{=} (2\pi)^{1/2} \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{F}(n)\, \overline{\hat{G}(n)}$$

Mit $\hat{F}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}\left(\frac{x}{T}\right) e^{-inx}\, dx \overset{y := \frac{x}{T}}{=} \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \hat{f}(y)\, e^{-inTy}\, dy$

$$= T(2\pi)^{-1/2} f(-nT)$$

$$\hat{G}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iy\left(\frac{x}{T}+n\right)} dy = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i\pi\left(\frac{x}{T}+n\right)} - e^{-i\pi\left(\frac{x}{T}+n\right)}}{i\left(\frac{x}{T}+n\right)}$$

$= \mathrm{sinc}\left(\pi\left(n + \frac{x}{T}\right)\right)$ ergibt sich also

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(-nT)\,\mathrm{sinc}\left(\pi\left(n + \frac{x}{T}\right)\right) \qquad \square$$