TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR. M. WOLF
DR. M. PRÄHOFER

Mathematik für Physiker 4
(Analysis 3)

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9204_2012W

Wintersem. 2012/13
Blatt 13
(24.1.2013)

Hausaufgaben

13.1. Ableitung von Distributionen

Die Heaviside-Funktion $\Theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass im Distributionensinn die Delta-Distribution die Ableitung der Heaviside-Funktion ist, $\Theta' = \delta$. Geben Sie, mit Beweis, für Θ eine Folge von approximierenden Schwartz-Funktionen an.

(b) Berechnen sie die erste und zweite Ableitung von $x \mapsto |x|$ im Distributionensinn. Geben Sie, mit Beweis, für die Betragsfunktion eine Folge von approximierenden Schwartz-Funktionen an.

13.2. Konvergenz von Distributionen

Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_k(x) = \sin(kx)$, aufgefasst als Folge von Distributionen gegen die Nulldistribution konvergiert.
HINWEIS: Betrachten Sie die Stammfunktionen der f_k.

13.3. Fouriertransformation von Distributionen

Bestimmen Sie die Fouriertransformierten folgender als Distributionen interpretierten Funktionen.

(a) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x\cdot Ax}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv definit,

(b) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $f(x) = e^{ik_0\cdot x}$, $k_0 \in \mathbb{R}^n$,

(c) $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

13.4. Distributionen auf Untermannigfaltigkeiten

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt mit glattem Rand und äußerem Normalenfeld $v : \partial A \to \mathbb{R}^n$ und χ_A die charakteristische Funktion von A. Zeigen Sie, dass im Distributionensinn gilt

$$\partial_j \chi_A = -v_j \delta_{\partial A}, \quad j = 1, \dots, n,$$

wobei für stetiges $f : \partial A \to \mathbb{R}$ die Distribution $f\delta_{\partial A}$ definiert ist durch

$$f\delta_{\partial A}[\phi] := \int_{\partial A} \phi(x) f(x) dS(x).$$

Abgabe der Hausaufgaben: 4.2.2013, bis 12:00, Briefkasten, Keller FMI-Gebäude