TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR. M. WOLF
DR. M. PRÄHOFER

Mathematik für Physiker 4
(Analysis 3)

Wintersem. 2012/13
Blatt 12
(17.1.2013)
http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9204_2012W

Ergänzung zu Aufgabe 11.1(b): Die Funktionen h_0, h_1, h_2, h_3 sollen linear unabhängig sein.

Hausaufgaben

12.1. Glattheit und Abfall der Fouriertransformation

(a) Sei $f \in C^m(\mathbb{R})$, $m \in \mathbb{N}_0$, und $f^{(j)} \in L^1(\mathbb{R})$ für alle $j = 0, \dots, m$. Zeigen Sie, dass

$$\widehat{f}(k) = \mathcal{O}\big(\tfrac{1}{|k|^m}\big) \quad \text{für} \quad |k| \to \infty.$$

(b) Berechnen Sie direkt die Fouriertransformierte von $f(x) = e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

(c) Zeigen Sie, dass $g(x) = x^k e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, k–mal stetig differenzierbar ist, $k \in \mathbb{N}$, indem Sie Eigenschaften der Fouriertransformierten $\widehat{g}$ ausnutzen.

12.2. Fouriertransformationen

Berechnen Sie die Fouriertransformationen von $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{für } |x| < 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{für } |x| < 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Skizzieren Sie f, g und ihre Fouriertransformationen.
Welches Abfallverhalten besitzen $\widehat{f}$ und $\widehat{g}$ für große $|k|$? (Recherche, ohne Beweis).
HINWEIS: Substitution $x = \sin t$, für g noch partielle Integration. Die Besselfunktionen sind gegeben durch $J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \cos(x \sin t - nt) dt = J_{-n}(-x) = (-1)^n J_{-n}(x)$.

12.3. Diffusionsgleichung mit Drift

Lösen Sie die Diffusionsgleichung mit Drift,

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t) = D\Delta\rho(x,t) + v \cdot \nabla\rho(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

mit $D > 0$, $v \in \mathbb{R}^n$, für die Anfangsbedingung $\rho(x,0) = \rho_0(x)$, wobei $\rho_0, \widehat{\rho_0} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
HINWEIS: Bestimmen Sie $G_t(x)$, so dass $\rho(x,t) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}(G_t * \rho_0)(x)$, wie in der Vorlesung.

Abgabe der Hausaufgaben: 28.1.2013, bis 12:00, Briefkasten, Keller FMI-Gebäude