PROF. DR. M. WOLF
DR. M. PRÄHOFER

Mathematik für Physiker 4 (Analysis 3)

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9204_2012W

Wintersem. 2012/13
Blatt 8
(07.12.2012)

Hausaufgaben

8.1. Laurent-Entwicklung

Bestimmen Sie die Laurent-Entwicklung von $\frac{1+z}{z(1-z)}$

(a) im Bereich $K_{0,1}(0)$, (b) im Bereich $K_{1,\infty}(0)$.

8.2. Residuen

(a) Beweisen Sie $\mathrm{Res}_{z_0}\big(\frac{f(z)}{z^n-c}\big) = \frac{z_0 f(z_0)}{nc}$, falls $f(z)$ holomorph und z_0 eine Nullstelle des Nenners ist, $c \in \mathbb{C}$.

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{Res}_0\big(z^n e^{\frac{1}{z}}\big)$, $n \in \mathbb{Z}$. (c) Bestimmen Sie $\mathrm{Res}_0\big(\frac{e^{\frac{1}{z}}}{z(1-z)}\big)$.

HINWEIS: Betrachten Sie für (c) ein Wegintegral um den Ursprung und entwickeln Sie $\frac{1}{1-z}$ um auf (b) zurückzuführen.

8.3. Berechnung von Integralen

Zeigen Sie:

(a) $$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1-2p\cos t + p^2} = \frac{2\pi}{1-p^2} \text{ für alle } p \in \mathbb{C} \text{ mit } |p| < 1,$$

(b) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{2}.$$

8.4. Residuenkalkül (Klausuraufgabe)

Berechnen Sie $C := \int_0^\infty \frac{1}{x^3+1}dx$.

HINWEIS: Integrieren Sie entlang des Randes von $G := \{z \in \mathbb{C} \mid \arg z \in [0, \frac{2\pi}{3}], |z| \le R\}$ und betrachten Sie den Limes $R \to \infty$.

Abgabe der Hausaufgaben: 17.12.2012, bis 12:00, Briefkasten, Keller FMI-Gebäude