TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. M. Wolf
Dr. M. Prähofer

Mathematik für Physiker 4 (Analysis 3)

Wintersem. 2012/13
Blatt 5
(15.11.2012)

`http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9204_2012W`

Hausaufgaben

5.1. Das Coulombfeld einer Punktladung

Gegeben ist das Vektorfeld $E(x) = \frac{x}{\|x\|^3}$, $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

(a) Sei $K \subset \mathbb{R}^3$ kompakt mit glattem Rand, $0 \notin \partial K$. Berechnen Sie $\int\limits_{\partial K} \langle E, v \rangle dS$ für die beiden Fälle $0 \notin K$ und $0 \in K \setminus \partial K$. Hinweis: Satz von Gauß.

(b) Zeigen Sie, dass E auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ kein Vektorpotential besitzt. Warum gibt es auf $\mathbb{R}^3 \setminus (\{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}_0^+)$ ein Vektorpotential A von E, d.h. es gilt dort $E = \operatorname{rot} A$?

5.2. Satz von Stokes, Klausuraufgabe

Gegeben sei $S_+ := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1 \wedge z \geq 0\}$ so orientiert, dass das Normalenfeld vom Ursprung weg zeigt, und das Vektorfeld

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} y + 4 \\ \tanh z + 2x \\ \cosh(x^2 + z^2) + e^{4y^2} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Fluss von $\operatorname{rot} F$ durch S_+ mit Hilfe des Satzes von Stokes einmal als Linienintegral und als möglichst einfaches Flächenintegral.

5.3. Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen und Cauchyscher Integralsatz

(a) Die komplexwertigen Funktionen f, g seien gegeben durch $f(x+iy) = u(x, y)+iv(x, y)$, $g(x + iy) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$ mit $u, v, \tilde{u}, \tilde{v} \in C^1(U, \mathbb{R})$, $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, welche jeweils die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\partial_x v = -\partial_y u, \quad \partial_x u = \partial_y v$$

und

$$\partial_x \tilde{v} = -\partial_y \tilde{u}, \quad \partial_x \tilde{u} = \partial_y \tilde{v}$$

erfüllen. Man sagt, für die komplexen Funktionen f, g selbst gelten die CR-Differentialgleichungen. Zeigen Sie, dass für fg wieder die CR-Differentialgleichungen gelten. Hinweis: Man betrachte $(x, y) \mapsto fg(x + iy) = f(x + iy)g(x + iy)$.

(b) Zeigen Sie, dass für $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{Z}$, auf dem jeweiligen Definitionsbereich die CR-Differentialgleichungen gelten.
Hinweis: Man betrachte $n = -1, 0, 1$, der Rest folgt mit (a) durch Induktion.

(c) Berechnen Sie das geschlossene Wegintegral $\oint\limits_{\gamma_\epsilon} z^n dz$, $n \in \mathbb{Z}$, wenn γ_ϵ die gegen den Uhrzeigersinn laufende Kreislinie mit Radius ϵ und Mittelpunkt im Ursprung parametrisiert. Was kann man über dieses Wegintegral für Kreislinien mit anderem Mittelpunkt aussagen?

Abgabe der Hausaufgaben: 26.11.2012, bis 12:00, Briefkasten, Keller FMI-Gebäude