TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

Prof. Dr. M. Wolf
Dr. M. Prähofer

Mathematik für Physiker 4
(Analysis 3)

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9204_2012W

Wintersem. 2012/13
Blatt 2
(25.10.2012)

Hausaufgaben

2.1. Das Volumen der d-dimensionalen Kugel

Sei $V_d(R) := \mathrm{vol}(\{x \in \mathbb{R}^d \,|\, \|x\| \leq R\})$, das Volumen der d–dimensionalen Kugel mit Radius R, $V_0(R) := 1$. Wegen der Skalierung des Volumens gilt $V_d(R) = v_d R^d$, wobei v_d das Volumen der d–dimensionalen Einheitskugel ist.

(a) Berechnen Sie v_d bei bekanntem v_{d-2}.

(b) Für die Gammafunktion gilt $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(1) = 1$ und $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ für $x > 0$. Zeigen Sie $v_d = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}$. Für welches d ist v_d maximal (mit Beweis)?

(c) Welche Seitenlänge hat ein Würfel im $\mathbb{R}^{10^{24}}$ mit dem gleichen Volumen wie die Einheitskugel?
Hinweis: Man verwende die Stirling-Formel $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x\Gamma(x)}{\sqrt{2\pi x}(x/e)^x} = 1$ und entwickle in $\frac{1}{d}$.

2.2. Transformationssatz

Wenden Sie jeweils den Transformationssatz aus der Vorlesung an, um die folgenden Integrale zu berechnen. Man wähle geeignete ausschöpfende Folgen.

(a) $\int\limits_{[-1,1]} \sqrt{1-x^2}\,dx$, Transformation $g : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (-1,1)$, $g(u) = \sin u$.

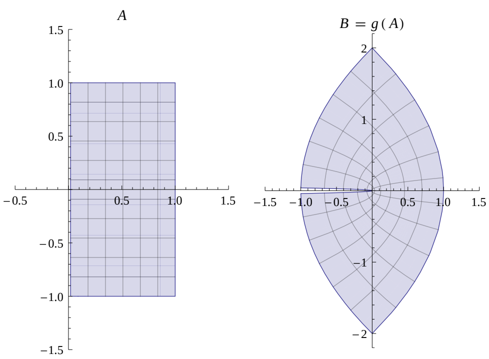
(b) $\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$, Transformation $g(t) = \tan t$.

(c) $\mathrm{vol}(B)$ mit $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| \leq 1 - \frac{y^2}{4}\}$ direkt und mit der Transformation

$$g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,$$

$$g(u,v) = (u^2 - v^2, 2uv).$$

Bemerkung: $(x+iy) = (u+iv)^2$.



2.3. Newtonsches Theorem

Ein Kugelsternhaufen habe die radialsymmetrische mittlere Massendichte $m(x) = \rho(\|x\|)$, mit $\rho : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ stetig, $r^3\rho(r) \to 0$ für $r \to \infty$. Das Gravitationspotential ist

$$V(x) := -\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{m(y)}{\|x-y\|} d^3y, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Wie groß ist die Masse $M(R)$ innerhalb der Kugel mit Radius R?

(b) Berechnen Sie $V(x)$ und zeigen Sie, dass das Kraftfeld $F(x) := -\mathrm{grad}\,V(x)$ gegeben ist durch $F(x) = -\frac{M(\|x\|)x}{\|x\|^3}$, also der Gravitationskraft eines Punktes im Ursprung mit Masse $M(\|x\|)$ entspricht.
Hinweis: Aus Symmetriegründen hängt $V(x)$ nur von $\|x\|$ ab. Man berechne $V(0,0,d)$ in Kugelkoordinaten und benutze dabei, dass

$$\frac{rd\sin\theta}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\theta}} = \frac{\partial}{\partial\theta}\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\theta}.$$

Abgabe der Hausaufgaben: 5.11.2012, bis 12:00, Briefkasten, Keller FMI-Gebäude