Prof. Dr. M. Wolf
Dr. M. Prähofer

Mathematik für Physiker 4 (Analysis 3)

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9204_2012W

Wintersem. 2012/13
Blatt 1
(18.10.2012)

Hausaufgaben

1.1. Mengen vom Lebesgue-Maß Null

(a) Geben Sie die Definition einer Menge vom Maß Null im $\mathbb{R}^n$ an.

(b) Geben Sie für die Winkelhalbierende $W := \mathbb{R}\binom{1}{1} = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Überdeckung durch Rechtecke an, deren Gesamtvolumen kleiner $\epsilon > 0$ ist.

(c) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $N := \{x \in \mathbb{R}^2\, f(x) = 0 \wedge \operatorname{grad} f(x) = 0\}$ eine Nullmenge. Man zeige, dass dann auch $f^{-1}(\{0\})$ eine Nullmenge ist.

(d) Cantorstaub im $\mathbb{R}^2$. Sei $C_0 := [0,1]^2$, $C_{n+1} := \frac{1}{3}\big(C_n \dot\cup (\binom{2}{0} + C_n) \dot\cup (\binom{0}{2} + C_n) \dot\cup (\binom{2}{2} + C_n)\big)$, $C_\infty := \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}_0} C_n$. Skizzieren Sie C_0, C_1 und C_2 und begründen Sie, warum C_∞ eine Nullmenge ist. Hinweis: Es gilt $C_{n+1} \subseteq C_n$.

1.2. Schwerpunkt und Trägheitstensor eines Oktaeders

Sei $M := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x_1| + |x_2| + |x_3| \leq 1\}$.

(a) Zeigen Sie, dass M ein Normalbereich ist.

(b) Berechnen Sie Volumen $\operatorname{vol}(M)$, Schwerpunkt $\vec{S}_M$ und Trägheitstensor J_M von M,

$$\vec{S}_M = \operatorname{vol}(M)^{-1} \int\limits_M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} d^3x, \ J_M = \int\limits_M \begin{pmatrix} x_2^2 + x_3^2 & -x_1x_2 & -x_1x_3 \\ -x_2x_1 & x_1^2 + x_3^2 & -x_2x_3 \\ -x_3x_1 & -x_3x_2 & x_1^2 + x_2^2 \end{pmatrix} d^3x.$$

1.3. Integrierbarkeit

Man berprüfe die eigentliche und uneigentliche Riemann-Integrierbarkeit der Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ und berechne möglichst explizit $\int\limits_Q f(x)dx$ für

(a) $Q = [0,L]^2$, $L > 0$, $f : Q \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} x^y & \text{für } (x,y) \neq 0, \\ 1 & \text{für } (x,y) = 0. \end{cases}$

(b) $Q = [0,1]^2$, $f : Q \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} -x^y \ln x & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$

(c) $Q = [0,1]^2$, $f : Q \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{x-y}{|x-y|^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
Hinweis: Fallunterscheidung $\alpha < 1$, $\alpha = 1$, $1 < \alpha < 2$, $\alpha \geq 2$.

Abgabe der Hausaufgaben: 29.10.2012, bis 12:00, Briefkasten, Keller FMI-Gebäude
Schreiben Sie bitte Blattnummer und Ihre Tutorgruppe deutlich auf Ihre Lösungen.