Maß- & Integrationstheorie (Exkursion ohne Beweise)

Ziel: Wir wollen Teilmengen von Ω (typischerweise $\Omega = \mathbb{R}^n$) Volumen, Masse, Wahrscheinlichkeit, etc. zuweisen. Wie & für welche Teilmengen geht das?

Def.:
- Sei Ω eine Menge. $\Sigma \subseteq \underbrace{\mathcal{P}}_{\text{Potenzmenge = Menge aller Teilmengen}}(\Omega)$ heißt „σ-Algebra" wenn

$$\boxed{\begin{array}{ll} (i) & A \in \Sigma \Rightarrow A^c := \Omega \setminus A \in \Sigma \\ (ii) & \{A_i \in \Sigma\}_{i \in \mathbb{N}} \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \Sigma \\ (iii) & \Omega \in \Sigma \end{array}}$$

- Die Elemente von Σ heißen (bzgl. Σ) „meßbare Mengen"

Bemerkungen:
- Es gilt (iv) $\emptyset \in \Sigma$ (da $\Omega \in \Sigma \Rightarrow \Omega^c = \emptyset \in \Sigma$)

  (v) $\{A_i \in \Sigma\}_{i \in \mathbb{N}} \Rightarrow \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \Sigma$ (da $\bigcap_i A_i = \left(\bigcup_i A_i^c\right)^c$)

- Analogie zur Def. einer Topologie! Letztere verlangt jedoch, dass $\{A_i \text{ offen}\}_{i \in \Lambda} \Rightarrow \bigcup_{i \in \Lambda} A_i$ offen für alle nicht notwendigerweise abzählbare Λ gilt, und es wird $\{A_i \text{ offen}\}_{i \in \tilde{\Lambda}} \Rightarrow \bigcap_{i \in \tilde{\Lambda}} A_i$ offen nur für endliche $\tilde{\Lambda}$ verlangt.

- Jede Familie $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ von Teilmengen von Ω läßt sich zu einer σ-Algebra erweitern (z.B. $\Sigma := \mathcal{P}(\Omega) \supseteq \mathcal{F}$)

- $\forall \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ gibt es eine kleinste σ-Algebra $\Sigma_{min} \supseteq \mathcal{F}$.

  $\hat{\Sigma} := \{\Sigma \subseteq \mathcal{P}(\Omega) \mid \Sigma \text{ ist } \sigma\text{-Algebra, so dass } \mathcal{F} \subseteq \Sigma\}$

  $\Sigma_{min} := \{A \subseteq \Omega \mid \forall \Sigma \in \hat{\Sigma} : A \in \Sigma\}$ ist diese kleinste σ-Alg.

  Diese heißt „die durch $\mathcal{F}$ generierte σ-Algebra."

Bsp. & Def.: • Ist $(\Omega, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, dann heißt die kleinste σ-Algebra $\mathcal{B}$, für die $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{O}$ gilt, „<u>Borel σ-Algebra</u>" & ihre Elemente „<u>Borelmengen</u>".

Bemerkung: Damit sind auch alle abgeschlossenen A in $\mathcal{B}$. Grob gesprochen ist jede Teilmenge in $\mathcal{B}$, die explizit (d.h. ohne Verwendung des Auswahlaxioms) konstruiert werden kann.

Def.: • Ist Σ eine σ-Algebra, dann heißt $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ ein „<u>Maß</u>" auf Σ, wenn $\mu(\emptyset) = 0$ und

$$\{A_i \in \Sigma\}_{i=1}^{\infty} \text{ disjunkt} \Rightarrow \boxed{\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)}$$

„σ-Additivität"

„σ" steht generell für „abzählbar ∞".

• Ein Maß heißt „<u>Wahrscheinlichkeitsmaß</u>" wenn $\mu(\Omega) = 1$.

• Das Tripel (Ω, Σ, μ) aus einer Menge Ω, einer σ-Algebra $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ und einem Maß $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ heißt „<u>Maßraum</u>".

• Ist $\mu(A) = 0$, so heißt A „<u>Nullmenge</u>" (bzgl. μ), oder „Menge vom Maß Null" (bzgl. μ).

• P gilt „<u>fast überall</u>" (bzgl. μ), wenn $N := \{x \in \Omega \mid \neg P(x)\}$ so ist, dass $\mu(N) = 0$ oder $\exists M \supseteq N : \mu(M) = 0$.

Korollar: Eigenschaften von Maßen:

$$\boxed{\begin{array}{llll}
(i) & A \subseteq B & \Rightarrow & \mu(A) \leq \mu(B) \quad \text{„Monotonie"} \\
(ii) & A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots & \Rightarrow & \lim\limits_{j \to \infty} \mu(A_j) = \mu\left(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j\right) \\
(iii) & \left.\begin{array}{l} A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \\ \wedge\ \mu(A_1) < \infty \end{array}\right\} & \Rightarrow & \lim\limits_{j \to \infty} \mu(A_j) = \mu\left(\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} A_j\right)
\end{array}}$$

„Stetigkeit"

Bsp.: ∘ <u>Dirac'sches δ-Maß</u> für $x \in \Omega$: $\delta_x : A \in \mathcal{P}(\Omega) \mapsto \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$

∘ <u>Zählmaß</u>: $\Sigma = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mu(A) = \begin{cases} |A| & \text{\# Elemente, falls } A \text{ endl.} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$

Bemerkung: ∘ Das „Auswahlaxiom" vorausgesetzt, existiert für $\Sigma = \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ kein Maß für das

(a) $\mu(A + x_0) = \mu(A) \ \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ (= Translationsinvarianz), und

(b) $\mu(Q) = \mathrm{vol}(Q)$ für alle Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$.

$\longrightarrow$ „Banach-Tarski Paradoxon"

∘ Es existiert genau ein Maß – das <u>„Lebesgue-Maß"</u> – für die Borel σ-Algebra in $\mathbb{R}^n$, das (a) & (b) erfüllt.

für die Konstruktion des Lebesgue-Maßes siehe z.B. Rudin: „Real & Complex Analysis"

Def.: Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt „meßbar" bzgl. einer σ-Algebra Σ, wenn $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\{x \in \Omega \mid f(x) > t\} \in \Sigma$$

Bemerkungen:

∘ Meßbarkeit benötigt nur eine σ-Algebra, kein Maß.

∘ Es is irrelevant ob wir in der Definition $>, \geq, <, \leq$ verwenden.

da z.B. $\{x \in \Omega \mid f(x) > t\} = \bigcup_{s \in \mathbb{N}} \{x \in \Omega \mid f(x) \geq t + \frac{1}{s}\}$

∘ $f : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt „meßbar" wenn $\mathrm{Im} f$ & $\mathrm{Re} f$ dies sind.

∘ $\{f : \Omega \to \mathbb{R} \mid f \text{ meßbar}\}$ ist abgeschlossen unter Linearkombinationen, Produkten & Verknüpfung mit meßbaren Fkt.en $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

∘ Ist $\Omega = \mathbb{R}^n$ und $\Sigma = \mathcal{B}$, dann sind alle stetigen Fkt.en meßbar.

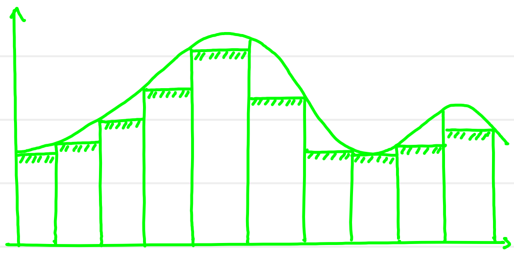
∘ Sind $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ meßbare Fkt.en & gilt $f_n \to f$ punktweise, dann ist f meßbar.

Def.: (Lebesgue Integral) Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum.

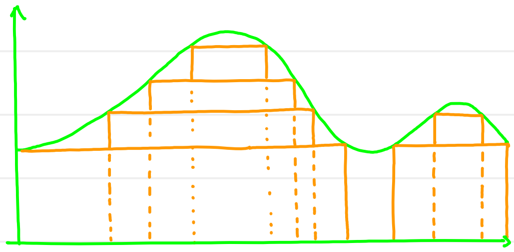
- Für eine meßbare Fkt. $f: \Omega \to [0, \infty]$ mit $F(t) := \mu\left(\{x \in \Omega \mid f(x) > t\}\right)$ heißt

$$\boxed{\int_\Omega f \, d\mu := \int_\Omega f(x) \, \mu(dx) := \int_0^\infty F(t) \, dt}$$

„(Lebesgue-) Integral" & f „(Lebesgue-) integrierbar" falls $\int_\Omega f \, d\mu < \infty$



Riemann-Integral: Unterteilung im Def.bereich



Lebesgue-Integral: Unterteilung im Wertebereich

- Ist $f: \Omega \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ meßbar, dann ist das (Lebesgue-) Integral definiert als

$$\int_\Omega f \, d\mu = \int (\operatorname{Re} f)_+ \, d\mu - \int (\operatorname{Re} f)_- \, d\mu + i \int (\operatorname{Im} f)_+ \, d\mu - i \int (\operatorname{Im} f)_- \, d\mu ,$$

wobei $(\ldots)_+, (\ldots)_-$ den pos. & neg. Anteil bezeichnet. f heißt „(absolut Lebesgue-) integrierbar", wenn $\boxed{\int_\Omega |f| \, d\mu < \infty .}$

integrierbar = absolut integrierbar!