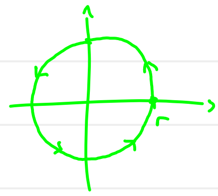
# Folgerungen aus dem Integralsatz von Cauchy-Goursat:

(= Cauchyscher Integralsatz)

**Lemma:** Sei $\gamma:[0,1]\to\mathbb{C}$, $\gamma(t):=re^{2\pi i t}$, $r>0$.



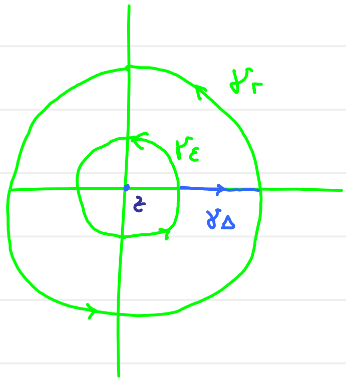

Dann gilt $$\oint_\gamma \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i.$$

**Beweis:** $$\oint_\gamma \frac{1}{z}\,dz = \int_0^1 \frac{1}{r}e^{-2\pi i t}\,2\pi i r\,e^{2\pi i t}\,dt = 2\pi i$$ □

**Satz** (Cauchysche Integralformel) Sei $U\subseteq\mathbb{C}$ offen, $f:U\to\mathbb{C}$ holomorph, $B_r(z):=\{\zeta \mid |\zeta-z|\le r\}\subseteq U$ und $\gamma_r:[0,1]\to U$, $\gamma_r(t):=z+re^{2\pi i t}$.

Dann gilt $$\boxed{f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta}$$

**Beweis:** In $U\setminus\{z\}$ ist $\zeta\mapsto\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)}$ holomorph und für $\varepsilon\in(0,r]$ ist $\gamma_\varepsilon$ homotop zu $\gamma_\Delta+\gamma_r-\gamma_\Delta$.




Also ist $$\oint_{\gamma_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\oint_{\gamma_\varepsilon}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$$

$$=\oint_{\gamma_\varepsilon}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\,d\zeta+\underbrace{\oint_{\gamma_\varepsilon}\frac{f(z)}{\zeta-z}\,d\zeta}_{\text{„ Lemma}}$$

$$\xrightarrow{\varepsilon\to 0}\ 0 + f(z)\,2\pi i$$

Bem.: $\gamma_\varepsilon$ & $\gamma_r$ heißen „frei homotop"

wegen $$\left|\oint_{\gamma_\varepsilon}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\,d\zeta\right| \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Standard-}\\ \text{abschätzung}}}{\le} 2\pi\varepsilon\sup_{\zeta\in B_\varepsilon(z)}\left|\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\right|\to 0$$ da $f$ holomorph □

<u>Korollar</u> (Mittelwerteigenschaft) Ist $f: B_r(z) \to \mathbb{C}$ holomorph, dann gilt:

$$\int_0^1 f(z + re^{2\pi i t})\, dt = f(z)$$

<u>Beweis:</u>

$$\int_0^1 f(\underbrace{z+re^{2\pi i t}}_{=:\,\gamma_r(t)})\,dt = \int_0^1 \frac{f(z+re^{2\pi i t})}{2\pi i\, r e^{2\pi i t}}\, \dot{\gamma}_r(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{f(\gamma_r(t))}{\gamma_r(t) - z}\, \dot{\gamma}_r(t)\, dt = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = f(z) \qquad \square$$

<u>Satz:</u> (Potenzreihenentwicklung)

Sei $f: U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph, $B_r(z_0)$ eine Kreisscheibe in $U$ um $z_0 \in U$ mit Radius $r > 0$ und $\gamma: [0,1] = z_0 + re^{2\pi i t}$. Dann gilt $\forall z \in B_r(z_0)$:

$$\boxed{\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \\ c_n &:= \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz \end{aligned}}$$

<u>Beweis:</u> O.B.d.A. $z_0 = 0$.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta}\cdot \underbrace{\frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}}}_{= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^n \text{ für } |z| < |\zeta| = r}\, d\zeta$$

gleichmäßige Konvergenz

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty} z^n \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta$$

$\square$

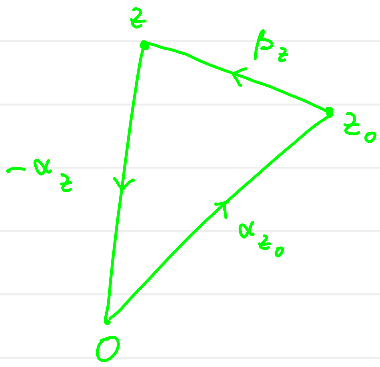
**Korollar:** Eine holomorphe Funktion ist beliebig oft komplex differenzierbar.

**Beweis:** Ist $f$ holomorph bei $z$, gibt es eine Umgebung in der $f(z)$ und damit auch $f'(z)$ als Potenzreihe geschrieben werden kann. $\square$

Für den Satz von Cauchy-Goursat ( $f$ holomorph $\wedge$ $\gamma$ null-homotop $\Rightarrow \oint_\gamma f(z)\,dz = 0$ ) gibt es folgende Umkehrung:

**Satz (von Morera)** Sei $f: U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ & gilt für die Randkurve $\gamma$ einer jeden ganz in $U$ liegenden Dreiecksfläche $\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$, dann ist $f$ holomorph.

**Beweis:** Betrachte das Dreieck $(0, z, z_0)$ mit den Kurven $\alpha_z(t) := tz$, $\beta_z(t) := (1-t)z_0 + tz$ und damit "$\gamma = \alpha_{z_0} + \beta_z - \alpha_z$".




Für $F(z) := \int_{\alpha_z} f(\xi)\,d\xi$ gilt dann

$$\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} \overset{\oint_\gamma f(\xi)d\xi = 0}{=} \frac{1}{z-z_0}\int_{\beta_z} f(\xi)\,d\xi = \int_0^1 f((1-t)z_0 + tz)\,dt$$

$$\longrightarrow f(z_0) \text{ für } z \to z_0 .$$

Damit ist $F$ bei $z_0$ komplex differenzierbar mit $F'(z_0) = f(z_0)$ und durch verschieben des Dreiecks auf ganz $U$ holomorph. Also ist auch $f = F'$ auf $U$ holomorph. $\square$

Damit haben wir:

$f$ holomorph

$\Leftrightarrow$ $f$ ist lokal als Potenzreihe darstellbar ( = „analytisch")

$\Leftrightarrow$ $\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$ für null-homotope $\gamma$

$\Leftrightarrow$ $\tilde{f}$ ist reell diffbar & CR DGL sind erfüllt

$\Leftrightarrow$ $f$ besitzt Stammfunktion auf einfach zus. Gebieten