

Lemma: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, so dass für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\|f\|_p \leq c_1 \|f\|_\infty + c_2 \sup_x \|x\|^{2n} |f(x)| \quad \forall p \in [1, \infty]$$

D.h. insbesondere, dass $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f \in L^p(\mathbb{R}^n) \quad \forall p \in [1, \infty]$

Beweis: Wir verwenden wiederholt, dass $\|gf\|_p \leq \|g\|_\infty \|f\|_p$.

$$\|f\|_p = \|f \cdot \chi + (1-\chi)f\|_p \quad \text{mit } \chi(x) := \begin{cases} 1, & \|x\| \leq 1 \\ 0 & \end{cases}$$

$$\leq \|f \cdot \chi\|_p + \|(1-\chi)f\|_p$$

$$\leq \|f\|_\infty \underbrace{\|\chi\|_p}_{=: c_1} + \|f \circ g^{-1} (1-\chi)\|_p \quad \text{mit } g(x) := \|x\|^{2n}$$

$$\leq \|f \circ g\|_\infty \underbrace{\|g^{-1}(1-\chi)\|_p}_{=: c_2}$$

$$\left(\int_{\|x\| > 1} \|x\|^{-2np} dx \right)^{1/p} =: c_2 \quad \square$$

Satz: (i) $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

(ii) $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $f \mapsto \hat{f}$ ist ein Automorphismus

Beweis: (i) $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \forall \alpha \in \mathcal{N}_0^n: x \mapsto x^\alpha f(x)$ ist beschränkt

$\Rightarrow \hat{f} \in C^\infty$ und es gilt

\uparrow
Satz über die Abl. von \hat{f}

$$\forall \alpha, \beta \in \mathcal{N}_0^n: k^\alpha \partial^\beta \hat{f} = (-i)^{|\alpha+\beta|} \hat{g}$$

wobei $g(x) := \partial^\alpha x^\beta f(x)$

Wegen $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^1(\mathbb{R}^n)$ ist $\hat{g} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$

und damit $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

(ii) folgt aus (i) zusammen mit dem Umkehrsatz & der Tatsache, dass $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^1(\mathbb{R}^n)$. □

Satz: (Plancherel) Für $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)} g(x) dx$ gilt:

$$\boxed{\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = \langle f, g \rangle} \quad \text{und damit} \quad \boxed{\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2} \quad \left(\begin{array}{l} \text{analog zu Parseval-} \\ \text{Relation für F.-Riten} \end{array} \right)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\hat{f}(k)} \hat{g}(k) dk \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \iint_{\mathbb{R}^n} e^{ikx} \overline{f(x)} dx \hat{g}(k) dk \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \iint_{\mathbb{R}^n} e^{ikx} \hat{g}(k) dk \overline{f(x)} dx \end{aligned}$$

\uparrow
Fubini (gilt wegen $\overline{f} \hat{g} \in \mathcal{S} \in L^1$)

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)} g(x) dx \quad \square$$

\uparrow
Umkehrsatz

Satz (Cauchy-Schwarz) Für $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ gilt:

$$\boxed{|\langle f, g \rangle| \leq \|\overline{f} g\|_1 \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2}$$

(falls die Ausdrücke in $[0, \infty]$ definiert sind).

(wegen $\|f\|_2 = \|\overline{f}\|_2$ gilt dann auch: $\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2$)

Beweis: Wir dürfen annehmen, dass $0 < \|f\|_2, \|g\|_2 < \infty$,
und wegen Homogenität der drei Ausdrücke ist o.B.d.A. $\|f\|_2 = \|g\|_2 = 1$.

$$\begin{aligned} |\langle f, g \rangle| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)} g(x) dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\overline{f(x)} g(x)| dx = \|\overline{f} g\|_1 \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 + |g(x)|^2 dx = \frac{1}{2} (\|g\|_2^2 + \|f\|_2^2) = 1 \end{aligned}$$

\uparrow
 $2|ab| \leq |a|^2 + |b|^2$

\square

Bemerkung: allgemein gilt für $p, q \in [1, \infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$:

$$(f \in L^p \wedge g \in L^q) \Rightarrow fg \in L^1 \text{ mit } \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

„Hölder Ungleichung“

Anwendung: Heisenberg'sche Unschärferelation (Schwartz-Raum Version)

Satz: Ist $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ mit $\|f\|_2 = 1$, dann gilt:

$$\left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \right) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} k^2 |\hat{f}(k)|^2 dk \right) \geq \frac{1}{4}$$

Interpretation: • In der QM sind $|f(x)|^2$ & $|\hat{f}(k)|^2$ Wahrscheinlichkeitsdichten für Ort bzw. Impuls, d.h. links steht ein Produkt der Varianzen (bei zentrierten Größen) von Ort & Impuls.

- Analoge Beziehungen lassen sich auch für die Lokalisierung eines Signals in der Zeitdomäne & im Frequenzraum formulieren.

Beweis: zu beweisen ist: $\|x f\|_2 \cdot \|k \hat{f}\|_2 \geq \frac{1}{2}$

Es gilt $\|k \hat{f}\|_2 = \|\hat{f}'\|_2 \stackrel{\text{Plancherel}}{=} \|f'\|_2$, also

$$\|x f\|_2 \cdot \|k \hat{f}\|_2 = \|x f\|_2 \cdot \|f'\|_2 \stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\geq} |\langle x f, f' \rangle|$$

Für das Skalarprodukt gilt:

$$\begin{aligned} \langle x f, f' \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x \overline{f(x)} f'(x) dx \\ &= \underbrace{\left[x |f(x)|^2 \right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0 \text{ da } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (\overline{f(x)} + x \overline{f'(x)}) dx \\ &= -1 - \overline{\langle x f, f' \rangle} \end{aligned}$$

und demnach $\operatorname{Re} \langle x f, f' \rangle = -\frac{1}{2}$, also $|\langle x f, f' \rangle| \geq \frac{1}{2}$ \square

Bemerkung: mit $f(x) = c e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}}$, $c := (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{4}}$ erhalten wir
 $\hat{f}(k) = c\sqrt{2\sigma} e^{-k^2\sigma^2}$, so dass sich für das Produkt
 der Varianzen ergibt:

$$\sigma^2 \cdot \frac{1}{4\sigma^2} = \frac{1}{4} \quad \text{d.h. '=' in der Unsicherheitsrelation}$$

Satz: (Fouriertransformation auf L^2)

Die Fouriertransformation \mathcal{F} lässt sich eindeutig und stetig
 von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen, so dass die resultierende
 Abbildung $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ linear und „unitär“ ist, d.h.

$$\langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g \rangle = \langle f, g \rangle \quad \forall f, g \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

(d.h. insbesondere $\|\mathcal{F}f\|_2 = \|f\|_2$.)

Beweisidee: Approximation von $f \in L^2$ durch $f_j \in \mathcal{S}$ mit $\|f_j - f\|_2 \rightarrow 0$

$\Rightarrow f_j$ ist Cauchy-Folge in L^2 & \hat{f}_j existiert

$\Rightarrow \hat{f}_j$ ist \rightarrow in L^2

$\Rightarrow \hat{f}_j$ konvergiert in L^2 □

Bemerkung zur Relation zw. L^1 & L^2 :

- $x \mapsto \begin{cases} x^{-1/2}, & x \in (0,1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ ist in L^1 aber nicht in L^2
- $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ ist in $L^2(\mathbb{R})$ aber nicht in $L^1(\mathbb{R})$ (\rightarrow Übung)

- Definiert man L^p nicht auf \mathbb{R}^n sondern auf $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$
 mit $\mu(\Omega) < \infty$ und charakteristischer Fkt. $\chi_\Omega(x) := \begin{cases} 1, & x \in \Omega \\ 0 & \end{cases}$,
 dann folgt aus Cauchy-Schwarz:

$$\|f\|_1 = \|f \chi_\Omega\|_1 \leq \|f\|_2 \|\chi_\Omega\|_2 = \|f\|_2 \mu(\Omega)^{1/2}$$

D.h. insbesondere $L^2(\Omega) \subseteq L^1(\Omega)$. Mittels Hölder Ungl. zeigt man

analog: $\mu(\Omega) < \infty$ & $1 \leq p < q \leq \infty \Rightarrow L^q(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$