

Anwendung ①:  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

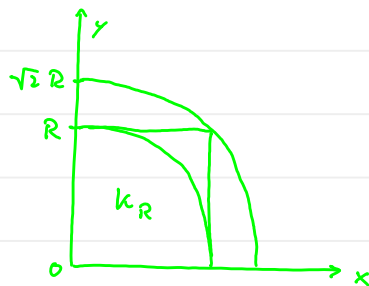
(Bemerkung: es gibt keine elementare Stammfunktion für  $e^{-x^2}$   
 $\operatorname{erf}(z) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-x^2} dx$  heißt „Gauß'sche Fehler-fkt.“)

Beweis: Lösung durch Rückführung auf ein 2-dim. Integral.

$$K_R := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq R^2 \}$$

$$\text{in } Q_R := [0, R]^2 \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$\text{in } K_{R\sqrt{2}}$$



$$\int_{K_R} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) = \int_A e^{-r^2} \cdot r \, d(r, \varphi)$$

$\uparrow$   $\uparrow$   
 Funktionaldet.

$$g(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad A := \{ (r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid r \in [0, R], \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}] \}$$

so dass  $g(A) = K_R$

( $g$  ist kein  $C^1$ -Diff bei  $r=0$ , aber dies ist eine Nullmenge)

Fubini:

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R e^{-r^2} r \, dr \, d\varphi$$

Substitution  $r^2 = t$ , " $r \, dr = \frac{1}{2} dt$ "

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{R^2} e^{-t} \frac{1}{2} dt \, d\varphi = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2})$$

Fubini

$$\int_{Q_R} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) = \int_0^R \int_0^R e^{-x^2} e^{-y^2} dx \, dy$$

$$= \left( \int_0^R e^{-x^2} dx \right)^2$$

Wegen  $k_{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{Q}_{\mathbb{R}} \subseteq k_{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R}$  gilt  $\int_{k_{\mathbb{R}}} \dots \leq \int_{\mathbb{Q}_{\mathbb{R}}} \dots \leq \int_{k_{\mathbb{R}}} \dots$ , also

$$\sqrt{\frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2})} \leq \int_0^R e^{-x^2} dx \leq \sqrt{\frac{\pi}{4}(1-e^{-2R^2})}$$

und schließlich  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

□

Bemerkung: In der freien Wildbahn wird man gleich über  $\mathbb{R}^2$  integrieren, mit dem Verständnis, dass dies ein Limes eigentlicher Integrale ist, bei dem alles gut geht ... wie im folgenden Bsp.:

Korollar: Für  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  positiv definit gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp[-\langle x, Ax \rangle] dx = \left( \frac{\pi^n}{\det(A)} \right)^{1/2}$$

Berechnung:  $g(x) := A^{-1/2}x$  ist  $C^1$ -Diffeomorphismus auf  $\mathbb{R}^n$

(Argument für  $R \rightarrow \infty$  fehlt  $\rightarrow$  Übung!)

↳ mit  $A = U \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} U^T$  ist  $A^{-1/2} := U \operatorname{diag}(a_1^{-1/2}, \dots, a_n^{-1/2}) U^T$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\exp[-\langle x, Ax \rangle]}_{f(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^2} \underbrace{\exp[-\|x\|^2]}_{f \circ g(x)} \underbrace{(\det A)^{-1/2}}_{|\det J_{g(x)}|} dx$$

$$= \prod_{i=1}^n a_i^{-1/2} = (\det(A))^{-1/2}$$

Fubini

$$\downarrow = \frac{1}{\sqrt{\det(A)}} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right)^n = \left( \frac{\pi^n}{\det(A)} \right)^{1/2}$$

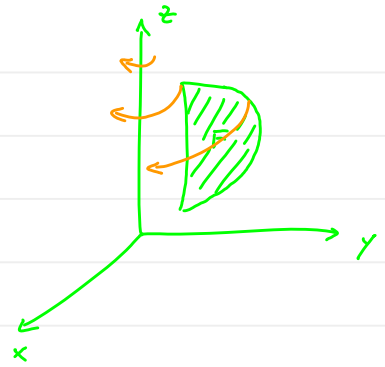
□

Anwendung ②: (Volumen eines Rotationskörpers)

$$\text{Sei } F := \left\{ (y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid z \in [z_0, z_1], y \in [a(z), b(z)] \right\}$$

ein Normalbereich mit  $z_0, z_1, a(z), b(z) \geq 0$ .

Das Volumen des Rotationskörpers  $K$ , der durch Rotation um die  $z$ -Achse entsteht ist



$$\text{vol}(K) = 2\pi y_0 |F|,$$

wobei  $|F| := \int_F d(y, z)$  der Flächeninhalt und  $y_0 := \frac{1}{|F|} \int_F y d(y, z)$

die  $y$ -Komponente des Schwerpunkts von  $F$  ist.

Beweis:

$$\int_K d(x, y, z) = \int_{F \times [0, 2\pi]} r d(r, z, \varphi) = \int_0^{2\pi} \int_{z_0}^{z_1} \int_{a(z)}^{b(z)} r dr dz d\varphi$$

Transformation in Zylinderkoordinaten      Fubini       $|F| y_0$

$$= 2\pi |F| y_0$$

□

# Integration auf Untermannigfaltigkeiten

Wiederholung: •  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  ist  $m$ -dim.  $C^1$ -UMF von  $\mathbb{R}^n$  ( $1 \leq m \leq \infty$ ), wenn  
& Ergänzung:  $\forall x \in M \exists U_x \subseteq \mathbb{R}^n$  offen &  $C^1$ -Diff.  $H: U_x \rightarrow U'_x \subseteq \mathbb{R}^n$ , so dass

$$H(M \cap U_x) = (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap U'_x$$

← „äußere Karte“

•  $h := H|_{M \cap U_x}$  heißt „(innere) Karte“

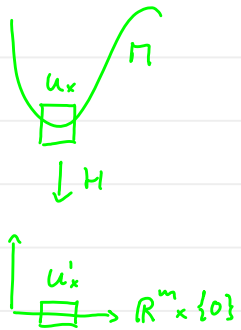
• Eine Familie  $\{h_x\}_{x \in M}$  mit „Kartenbereichen“  $\{M \cap U_x =: V_x\}$

heißt „Atlas“ wenn  $\bigcup_x V_x = M$

•  $n-m$  heißt „Kodimension“ von  $M$

•  $x \in \mathbb{R}^n$  heißt „regulärer Punkt“ für  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , wenn  
 $f'(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  surjektiv (dazu ist also  $n \geq m$  notwendig)

•  $f(x)$  ist „regulärer Wert“, wenn  $f^{-1}(\{f(x)\})$  nur reg. Punkte enth.



## Äquivalente Charakterisierungen:

① lokale Parametrisierung durch Diffeomorphismen  $\{h^{-1}\}$

②  $M$  als lokale Nullstellenmenge einer reg. Fkt., d.h.

$\forall x \in M \exists U_x \ni x$  offen,  $f \in C^1(U_x \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n-m})$  mit  $f'(x)$  surjektiv,

so dass  $M \cap U_x = f^{-1}(\{0\}) = \{z \in U_x \mid f(z) = 0\}$

(siehe Satz vom regulären Wert aus Analysis II)

③  $M$  als lokaler Graph, d.h.

$\forall x \in M \exists U_x \ni x$  offen,  $V \subseteq \mathbb{R}^m$  offen,  $f \in C^1(V, \mathbb{R}^{n-m})$ , so dass

$\exists$  Permutation  $P$ :  $M \cap U_x = P \{ (x, y) \in V \times \mathbb{R}^{n-m} \mid f(x) = y \}$

Bsp.:

Paraboloid für  $a, b > 0$

$$M := \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid ax_1^2 + bx_2^2 = x_3 \}$$



① Parametrisierung:  $h^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow M, (x_1, x_2) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ax_1^2 + bx_2^2 \end{pmatrix}$

② Nullstellenmenge von  $f(x) = x_3 - ax_1^2 - bx_2^2$

③ Graph von  $f(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_2^2$