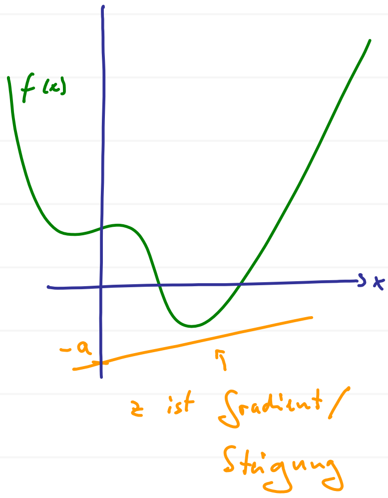
Legendre-Transformation

Def.: Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Die „Legendre-Fenchel Transformierte" $f^*: \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}} := \{\pm\infty\} \cup \mathbb{R}$ ist definiert als:

$$f^*(z) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\langle z, x \rangle - f(x) \right)$$

Korollar: $f^*(z) \leq a \;\Rightarrow\; \forall x: \underbrace{\langle z, x \rangle - a}_{\substack{\text{affine Funktion} \\ x \mapsto \langle z,x \rangle - a}} \leq f(x)$



D.h. $f^*(z)$ ist das kleinst mögliche a, so dass der Graph der affinen Fkt. $x \mapsto \langle z, x \rangle - a$ nirgends über dem Graphen von $x \mapsto f(x)$ liegt.

Satz: Zu jedem $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist f^* konvex.

Beweis: Sei $z_\lambda := \lambda z_1 + (1-\lambda) z_0$, $\lambda \in [0,1]$

$$f^*(z_\lambda) = \sup_x \left(\lambda \langle z_1, x \rangle + (1-\lambda) \langle z_0, x \rangle - f(x) \right)$$

$$\leq \sup_x \lambda \left(\langle z_1, x \rangle - f(x) \right) + \sup_{\tilde{x}} (1-\lambda) \left(\langle z_0, \tilde{x} \rangle - f(\tilde{x}) \right)$$

$$= \lambda f^*(z_1) + (1-\lambda) f^*(z_0). \qquad \square$$

Bemerkung: Daraus folgt $\left(f^*(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow f^* \text{ stetig} \right)$

Bsp.: Für $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{|x|^p}{p}$, $p \in (1, \infty)$

ist $f^*(z) := \frac{|z|^q}{q}$ wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Beweis: $f(x)$ konvex $\Rightarrow$ $g(x) := xz - f(x)$ konkav

D.h. wenn für ein $x \in \mathbb{R}$ gilt

$g'(x) = z - |x|^{p-1} \operatorname{sgn}(x) \overset{!}{=} 0$, dann wird dort das Sup. angenommen.

Dies ist erfüllt für

$x \stackrel{!}{=} \operatorname{sgn}(z)\,|z|^{\frac{1}{p-1}}$ und damit gilt

$$f^*(z) = |z|^{\frac{1}{p-1}+1} - \frac{1}{p}|z|^{\frac{p}{p-1}}$$

$$= \left(1-\frac{1}{p}\right)|z|^{\frac{p}{p-1}} \underset{1-\frac{1}{p}=\frac{1}{q}}{\overset{=}{\uparrow}} \frac{1}{q}|z|^q . \quad \square$$

Satz: [Fenchel-Young Ungleichung]

Für $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ $x,z\in\mathbb{R}^n$ gilt $\quad f(x)+f^*(z)\geq\langle z,x\rangle \qquad$ (FY)

Ist f zudem konvex & diff.bar, dann gilt '=' in (FY) wenn $z=\nabla f(x)$.

Beweis: (FY) folgt aus der Def. $f^*(z)=\sup_{\tilde{x}}\langle z,\tilde{x}\rangle - f(\tilde{x}) \geq \langle z,x\rangle - f(x)$.

Ist f nun konvex & diffbar, dann ist $g(x):=\langle z,x\rangle - f(x)$ konkav & diff.bar. D.h. $\nabla g(x)=0 \Rightarrow g$ hat bei x globales Maximum.

Nun gilt $\nabla g(x) = z - \nabla f(x)$, so dass

$$\nabla f(x)=z \quad\Rightarrow\quad f^*(z)=\langle z,x\rangle - f(x).$$

$\square$

Bsp.: • für $p,q\in(1,\infty)$ mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ und $x,z\in\mathbb{R}$ gilt:

$$\frac{|x|^p}{p}+\frac{|z|^q}{q}\geq xz \qquad (*)$$

Korollar: [Hölder-Ungl.] Sei $p,q\in[1,\infty]$ mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Dann gilt $\forall x,z\in\mathbb{R}^n$:

$$\boxed{\sum_{i=1}^n |x_i z_i| \leq \|x\|_p\,\|z\|_q} \quad \text{wobei } \|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$$

Beweis: Wegen Homogenität können wir o.B.d.A. annehmen, dass $\|x\|_p=\|z\|_q=1$.

Dann ist $\displaystyle\sum_{i=1}^n |x_i z_i| \leq \sum_{i=1}^n\left(\frac{|x_i|^p}{p}+\frac{|z_i|^q}{q}\right) = \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ $\quad\square$

Bsp.: Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pos. definit und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{2} \langle x, Ax \rangle$, dann gilt

$$f^*(z) = \frac{1}{2} \langle z, A^{-1} z \rangle$$

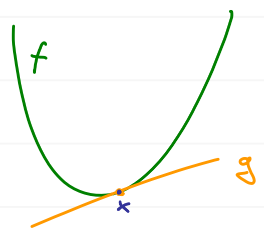
Beweis: f ist C^1 & konvex, $f^*(z) = \sup\limits_x g(x)$, $g(x) := \langle z, x \rangle - f(x)$

$$\nabla g(x) = z - \nabla f(x) \overset{!}{=} 0 \iff z \overset{!}{=} \nabla f(x) = Ax \iff x \overset{!}{=} A^{-1} z$$

Also gilt $f^*(z) = \langle z, A^{-1} z \rangle - \frac{1}{2} \langle A^{-1} z, A A^{-1} z \rangle = \frac{1}{2} \langle z, A^{-1} z \rangle$ $\square$

Satz: Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex, dann gilt $f^{**} = f$

Beweis: $f^{**}(x) = \sup\limits_z \langle z, x \rangle - f^*(z)$



$$= \sup_z \sup_{a \geq f^*(z)} \langle z, x \rangle - a$$

$$= \sup \{ g(x) \mid g(x) = \langle z, x \rangle - a, \; g \leq f \}$$

$$\underset{\uparrow}{=} f(x)$$

da wir für g einfach die Tangente an den Graphen in x nehmen können, für die gilt $g(x) = f(x)$

$\square$

Def.: Wenn $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ konvex ist und für alle $z \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ der Gleichung $\nabla f(x) = z$ existiert, dann heißt

$$f^*(z) = \langle x(z), z \rangle - f(x(z)) \quad \text{mit} \quad \nabla f(x(z)) \overset{!}{=} z$$

die „<u>Legendre-Transformierte</u>" von f.

Bsp.: Sei $L(t, x, v)$ eine Lagrange-Funktion, so dass $f : v \mapsto L(t, x, v)$ die Bedingungen erfüllt. Dann definiert

$$f^*(p) = \langle v(p), p \rangle - L(t, x, p(v)) =: H(t, x, p) \text{ die „Hamilton fkt.“},$$

wobei $v(p)$ durch $p \overset{!}{=} \nabla f(v(p))$ gegeben ist.