20.5. Dynamische Systeme: ein Ausblick

Genügt $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ einer globalen Lipschitzbedingung, gibt es für alle $z \in \mathbb{R}^m$ eine eindeutige, globale Lösung $\phi(z): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, $t \mapsto \phi_t(z)$ des AWP

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad , \quad x(0) = z$$

Die stetige Abb. $\phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $(t, z) \to \phi_t(z)$ heißt (Lösungs-)Fluß der DGL. Es gilt:

1. Normierung: $\phi_0 = id$
2. Gruppeneigenschaft: $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$.

Def: Eine stetige Abb $\phi: \mathbb{R} \times M \to M$ mit $M \subset \mathbb{R}^m$ mit den Eigenschaften 1. & 2. heißt *dynamisches System* oder Fluß *mit Phasenraum* M. Für $z \in M$ heißt

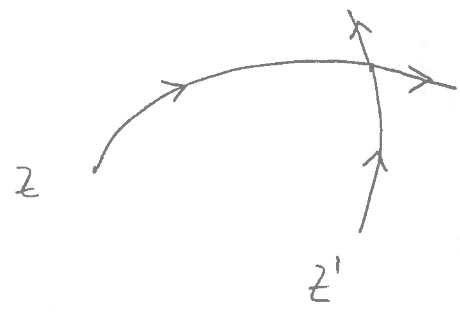
- $\{ \phi_t(z) \mid t \in \mathbb{R} \}$ *Trajektorie* (durch z)
- $\mathbb{R} \to M$, $t \to \phi_t(z)$ *Bahnkurve* (durch z).

Allgemeine Eigenschaften dyn. Systeme:

1. Reversibilität: $\Phi_t \circ \Phi_{-t} = id \quad \forall t \in \mathbb{R}$

2. Trajektorien schneiden sich nicht im Phasenraum:

$$z \neq z' \wedge \Phi_t(z) = \Phi_s(z') \implies t \neq s$$



Ansonsten: $z' = \Phi_{-s} \circ \Phi_t(z)$
$= \Phi_{t-s}(z) = z$

Spezialfall: Hamiltonsche dynamische Systeme

Ist $m = 2n$ und $M \subset \mathbb{R}^{2n}$ offen, $H \in C^2(M, \mathbb{R})$

- Vektorfeld $f(p,x) = \begin{pmatrix} -\nabla_x H(p,x) \\ \nabla_p H(p,x) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1}_n \\ \mathbb{1}_n & 0 \end{pmatrix}}_{=:\, J_n} \nabla H(p,x)$

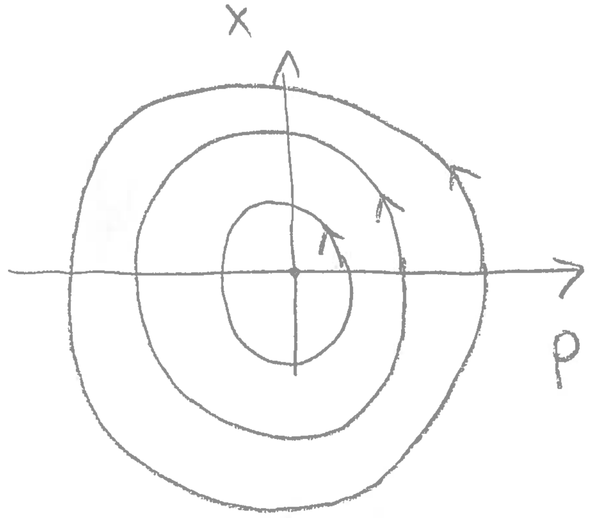
- Hamiltonsche DGL $\begin{pmatrix} \dot p(t) \\ \dot x(t) \end{pmatrix} = f\big(p(t), x(t)\big) \quad (*)$

Falls $(*)$ globale Lipschitzbed. erfüllt, definiert dies ein dynamisches System $\Phi: \mathbb{R} \times M \to M$.

<u>Beispiele:</u> 1. $H(p,x) = \frac{p^2}{2} + \frac{x^2}{2}$, Phasenraum $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} \dot p \\ \dot x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ x \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi_t(p,x) = e^{tJ_1}\begin{pmatrix} p \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ x \end{pmatrix}}$$



"Phasenraumportrait" = Trajektorien in $\mathbb{R}^2$

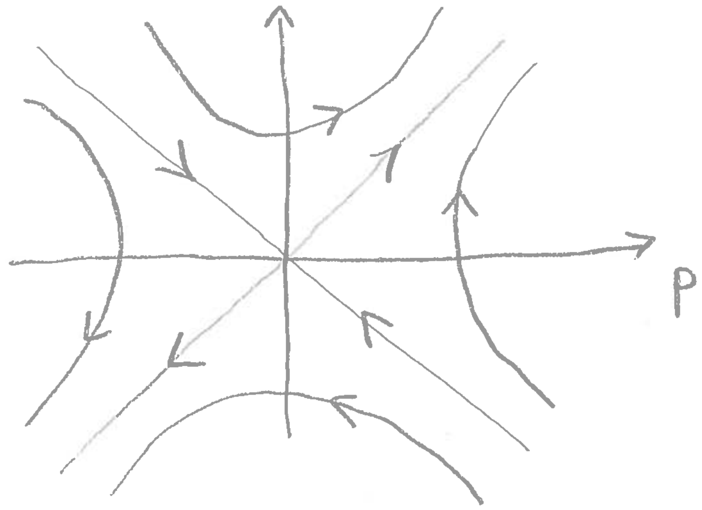
$$H(\phi_t(p,x)) = H(p,x)$$

2. $H(p,x) = \frac{p^2}{2} - \frac{x^2}{2}$, Phasenraum $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} \dot p \\ \dot x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ x \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi_t(p,x) = e^{tA}\begin{pmatrix} p \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ t \end{pmatrix}}$$

Phasenraumportrait



Def: $m \in M$ heißt Fixpunkt (oder Ruhelage) eines dynamischen Systems $\phi : \mathbb{R} \times M \to M$, falls $\phi_t(m) = m \ \forall t$.

Der Fixpunkt m heißt (Liapunov-) stabil, wenn jede Umgebung $U \subset M$ von m eine (kleinere) Umgebung $V \subset M$ von m besitzt mit $\phi_t(V) \subset U \ \forall t \geq 0$.

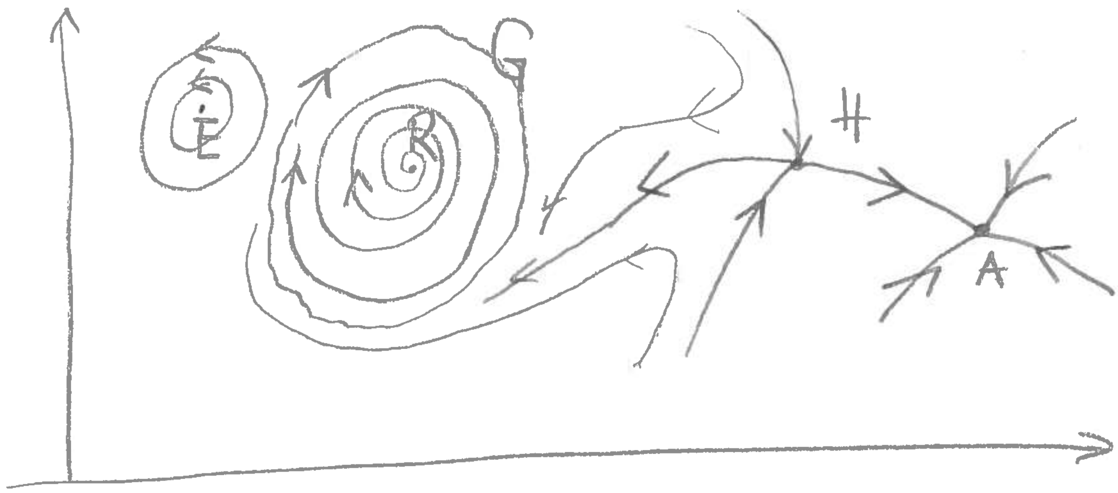
Gilt zusätzlich: $\phi_t(V) \subset \phi_s(V) \ \forall t \geq s \geq 0$ und $\lim_{t \to \infty} \phi_t(x) = m \ \forall x \in V$ heißt m asymptotisch stabil.

In obigen 2 Beispielen ist $m = 0 \in \mathbb{R}^2$ jeweils Fixpunkt.

Bsp 1. $0 \in \mathbb{R}^2$ ist stabil (nicht asympt. stabil)

Bsp 2. — ist nicht stabil.

Mögliches Phasenportrait eines dyn. Systems $\Phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:



- H hyperbolischer Fixpunkt
- E elliptischer Fixpunkt (stabil - nicht asympt.)
- A attraktiver Fixpunkt (asympt. stabil)
- R repulsiver Fixpunkt
- G attraktiver Grenzzyklus

Bemerkungen: Für Hamiltonsche dyn. Systeme gibt es nur H und E (ansonsten Widerspruch zur Volumenerhaltung!)

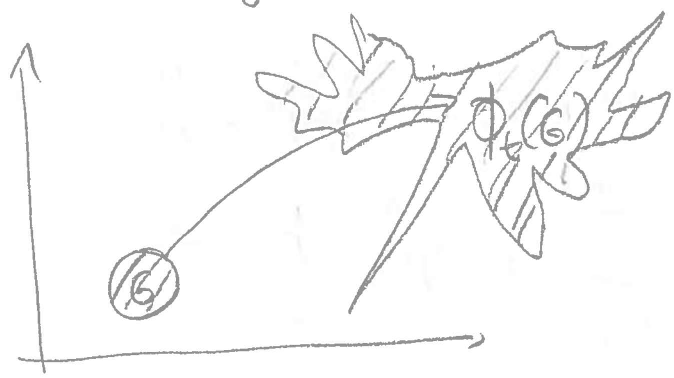
Satz: Ist das Vektorfeld $f \in \mathcal{C}^1(M, \mathbb{R}^m)$ des zu $\Phi : \mathbb{R} \times M \to M$ gehörigen dyn. Systems divergenzfrei, dann ist Φ volumentreu, d.h.

$$\boxed{\mathrm{Vol}(\Phi_t(G)) = \mathrm{Vol}(G)} \left(:= \int_G d^m x \right)$$

für alle $G \subset M$ offen beschränkt.

Für $f(x) = Ax$ wurde dies in Kap 18 bewiesen.

Allgemeiner: vgl. Analysis 3.



Beispiel: Hamiltonsches Vektorfeld $H \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$

$$\mathrm{div}\, f(p,x) = \mathrm{div}\left(J_n \nabla H(p,x)\right)$$

Lemma von Schwarz

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(-\frac{\partial}{\partial p_j}\frac{\partial}{\partial x_j} H(p,x) + \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial p_j} H(p,x) \right) = 0$$

Satz (Poincaré, Zermelo Wiederkehrsatz)

Sei $\phi: \mathbb{R} \times M \to M$ ein volumentreues dynamisches System und $\Gamma \subset M$ eine invariante Menge, d.h.

$$\phi_t(\Gamma) \subset \Gamma \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

mit endlichem Volumen $Vol(\Gamma) < \infty$. Dann liegt $\phi_t(z)$ für fast jeden Anfangszustand $z \in \Gamma$ für ∞-viele $t \geq 0$ in einer bel. kleinen Umgebung von z.

Beweisidee: (im Vorgriff auf 3. Semester)

- stroboskopische Dynamik $T: \Gamma \to \Gamma$, $T = \phi_\tau$, $\tau > 0$,

$$T^n = \phi_{n\tau}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

- Sei $U \subset \Gamma$ offen und $\overline{U}_0 := \{z \in U \mid T^j z \notin U \ \forall j > 0\}$

$$\overline{U}_n := T^{-n}\overline{U}_0 = \{z \in U \mid T^n z \in U \wedge T^j z \notin U \ \forall j > n\}$$

= alle Pkte die U nach n Zeitschritten für immer verlassen, $n \in \mathbb{N}_0$.

Es gilt: $\overline{U}_n \cap \overline{U}_m = \emptyset \quad \forall n \neq m$.

$$\mathrm{Vol}(\overline{U}_0 \cup \ldots \cup \overline{U}_N) = \sum_{j=0}^{N} \mathrm{Vol}(\overline{U}_j) = \sum_{j=0}^{N} \mathrm{Vol}(T^{-j}\overline{U}_0)$$

Additivität
$\overline{U}_n \cap \overline{U}_m = \emptyset$

$$= N\,\mathrm{Vol}(\overline{U}_0)$$

Invarianz

Da $N \in \mathbb{N}$ beliebig und $\mathrm{Vol}(\ldots) < \infty$ gilt:

$$\mathrm{Vol}(\overline{U}_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Vol}\Big(\bigcup_{j=0}^{\infty} \overline{U}_j\Big) = 0 .$$

D.h. Volumen der Pkte $\overline{U} := \bigcup_{j=0}^{\infty} \overline{U}_j$, die U irgendwann für immer verlassen ist null. □

Bemerkung: Wiederkehrsatz in Hamiltonschen Systemen:

1. $\Gamma = \{(p,x) \mid H(p,x) \text{ const}\}$ ist invariant und typisch gilt $\mathrm{Vol}(\Gamma) < \infty$

2. Wiederkehrzeiten sind astronomisch!

21 Grundlagen der Variationsrechnung

Grundproblem der Variationsrechnung:

Extremalstellen von Funktionalen !?

Funktional = Abb. $F: X \to \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) mit

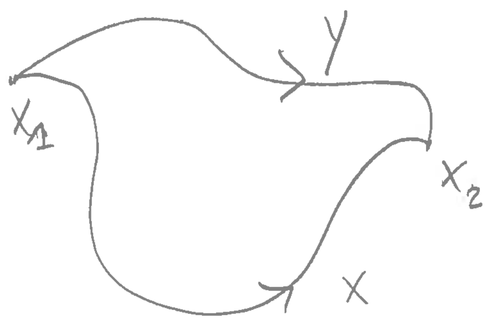
X Raum von Funktionen.

21.1. Euler Lagrange Gleichung für Wirkungsfunktional

Annahmen für's Folgende:

- Lagrangefunktion $L \in C^2(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times [t_1,t_2], \mathbb{R})$
- Funktionenraum: $X = \{x \in C^2([t_1,t_2], \mathbb{R}^m) \mid x(t_1) = x_1, x(t_2) = x_2\}$

Kurven zwischen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m$



- Wirkungsfunktional $F: X \to \mathbb{R}$

$$\boxed{F(x) := \int_{t_1}^{t_2} L(x(t), \dot{x}(t), t)\, dt}$$

X ist kein Vektorraum. Aber:

$$H := \{ h \in C^2([t_1,t_2], \mathbb{R}^m) \mid h(t_1) = h(t_2) = 0 \}$$

ist (reeller) Vektorraum. Für $x, y \in X$ ist

$$h = y - x \in H.$$

Def: $F: X \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar, falls für alle $x \in X$ eine lineare Abbildung $L_x : H \to \mathbb{R}$ existiert, so daß

$$F(x+h) = F(x) + L_x(h) + O(\|h\|^2)$$

wobei $\|h\| := \sup_{s \in [t_1,t_2]} \left[|h(s)| + \left| \frac{dh}{ds}(s) \right| \right]$.

Damit:

$$L_x(h) = \frac{d}{d\varepsilon} F(x + \varepsilon h) \Big|_{\varepsilon = 0}.$$

Ableitung des Wirkungsfunktionals für $n=1$:

$$\frac{d}{d\varepsilon}F(x+\varepsilon h) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vgl. S.}}}{=} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{d\varepsilon} L(x(t)+\varepsilon h(t), \dot{x}(t)+\varepsilon \dot{h}(t), t)\, dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[\partial_1 L(x+\varepsilon h, \dot{x}+\varepsilon \dot{h}, t)\, h + \partial_2 L(x+\varepsilon h, \dot{x}+\varepsilon\dot{h}, t)\, \dot{h}\right] dt$$

partielle Int.

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\partial_1 L(x+\varepsilon h, \dot{x}+\varepsilon\dot{h}, t) - \frac{d}{dt}\partial_2 L(x+\varepsilon h, \dot{x}+\varepsilon\dot{h}, t)\right) \times h\, dt + \underbrace{\Big[\partial_2 L(x+\varepsilon h, \dot{x}+\varepsilon\dot{h}, t)\, h\Big]_{t_1}^{t_2}}_{=0}$$

$$\overset{\varepsilon=0}{=} \int_{t_1}^{t_2} \left[(\partial_1 L)(x,\dot{x},t) - \frac{d}{dt}(\partial_2 L)(x,\dot{x},t)\right] h\, dt$$

$$=: L_x(h) .$$

Extremalität des Wirkungsfunktionals bedeutet:

$$\boxed{L_x(h) = 0 \quad \forall\, h \in H .}$$

(Extremalstelle $x \in X$)

Satz (Fundamentallemma der Variationsrechnung)

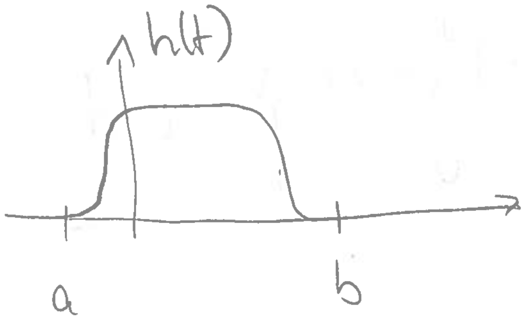
Wenn für $f \in \mathcal{C}([t_1,t_2],\mathbb{R})$ gilt, daß für alle

$$h \in \mathcal{C}^\infty([t_1,t_2],\mathbb{R}) \text{ mit } h(t_1) = h(t_2) = 0$$

gilt: $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,h(t)\,dt = 0$, dann: $f = 0$.

Beweis: Angenommen $f(t^*) > 0$ für ein $t^* \in [t_1,t_2]$.

Da f stetig, gibt es $[a,b] \subset [t_1,t_2]$ mit: $f(t) \geq \frac{1}{2} f(t^*)$ für alle $t \in [a,b]$. Wähle $h \in \mathcal{C}^\infty([t_1,t_2],\mathbb{R})$ mit



- $h(t) > 0 \quad \forall\, t \in (a,b)$
- $h(t) = 0$ sonst.
- $\displaystyle\int_a^b h(t)\,dt > 0$.

Dann:
$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,h(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,h(t)\,dt$$
$$\geq \frac{1}{2} f(t^*) \int_a^b h(t)\,dt > 0 \quad ↯$$

Analog schließt man $f(t^*) < 0$ aus $\square$

Schreibt man $\partial_1 L = \frac{\partial L}{\partial x}$, $\partial_2 L = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$, folgt aus dem Fundamentallemma für $m=1$:

<u>Satz</u>: $x \in X$ ist genau dann Extremalstelle des Funktionals

$$F(x) = \int_{t_1}^{t_2} L(x(t), \dot{x}(t), t)\, dt,$$ wenn gilt

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t) = \frac{\partial L}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t), t)} \quad (*)$$

<u>Euler Lagrange Gleichung</u>

<u>Bemerkung</u>: Für $m \geq 1$ ist $(*)$:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}(x, \dot{x}, t) = \frac{\partial L}{\partial x_j}(x, \dot{x}, t) \quad \forall j \in \{1, .., m\}}$$

<u>Satz</u>: Hängt $L = L(x, \dot{x})$ nicht explizit von t ab, dann ist $H(t) = \dot{x}(t)\frac{\partial}{\partial \dot{x}}L(x(t), \dot{x}(t)) - L(x(t), \dot{x}(t))$ unabhängig von t für jede Lösung von $(*)$. ("Erstes Integral")

Beweis: $\frac{d}{dt} H(t) = \ddot{x}(t) \frac{\partial}{\partial \dot{x}} L(x(t),\dot{x}(t)) + \dot{x}(t) \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} L(x(t),\dot{x}(t))$

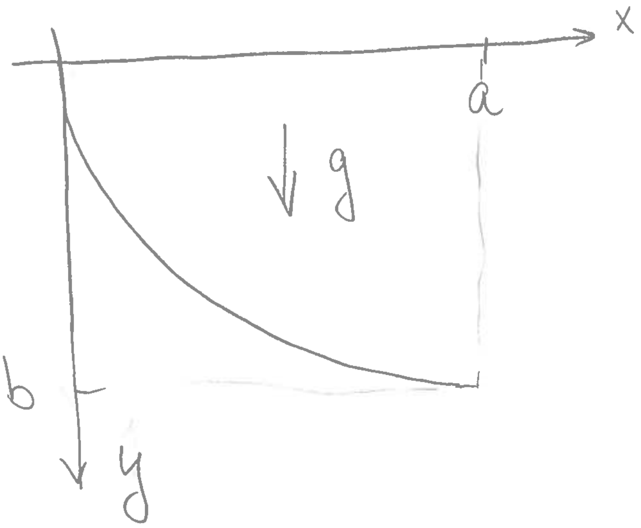
$- \dot{x}(t) \frac{\partial}{\partial x} L(x(t),\dot{x}(t)) - \frac{\partial}{\partial \dot{x}} L(x(t),\dot{x}(t))\, \ddot{x}(t)$

$\overset{(*)}{=} 0 \quad \square$

21.2. Ausgewählte Beispiele:

A. Brachistochrone:

Schnellste Verbindung zwischen $0, \binom{a}{b} \in \mathbb{R}^2$



- Start mit Geschwindigkeit 0 im Ursprung
- Schwerefeld $g > 0$

Energieerhaltung $\frac{1}{2} p^2 = g y$

$\Rightarrow \quad p = \sqrt{2gy}$

Zeit entlang Kurve $x \mapsto \binom{x}{y(x)}$ mit $y : [0,a] \to [0,b]$:

$$\boxed{T(y) := \int_0^a \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{\sqrt{2g\, y(x)}}\, dx}$$

<u>Bem.:</u> $\sqrt{1+y'(x)^2}\,dx$ ist infinitesimale Bogenlänge

Somit $T(y) = \int_0^b L(y(x), y'(x))\,dx$ mit

Lagrangefunktion $L(y, y') = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}$

Euler Lagrange Gleichung: $\frac{\partial}{\partial y} L = \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'}$

Konstante der Bewegung (vgl. Satz)

$$c \overset{!}{=} y' \frac{\partial L}{\partial y'} - L = \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}\sqrt{2gy}} - \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}\sqrt{2gy}} \Rightarrow \boxed{2c^2 g y (1+y'^2) = 1}$$

Parametrisierung der Kurve $t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ mit $y(t) = y(x(t))$

- $\dot{x} = \frac{\dot{y}}{y'}$
- Setze $y(t) = k(1 - \cos t)$ mit $k := \frac{1}{4c^2 g}$

Somit $$\dot{x}(t) = \frac{\dot{y}(t)}{y'(x(t))} = \frac{k \sin t}{\sqrt{\frac{1}{2c^2 g\, y(t)} - 1}} = \frac{k \sin t}{\sqrt{\frac{2}{1-\cos t} - 1}}$$

$$= \frac{k \sin t \sqrt{1-\cos t}}{\sqrt{1+\cos t}} \underset{\uparrow}{=} k(1-\cos t) \qquad (*)$$

$$\sin t = \sqrt{(1-\cos t)(1+\cos t)}$$

Lösung von (*) mit $x(0) = 0$:

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x(t) &= k(t - \sin t) \\ y(t) &= k(1-\cos t) \end{aligned}}$$ „Zykloide"

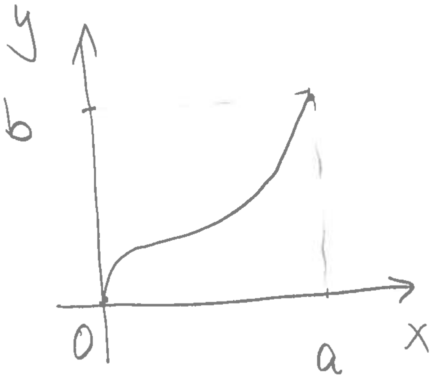
Falls k & T so gewählt, daß $\boxed{\begin{aligned} k(T-\sin T) &= a \\ k(1-\cos T) &= b \end{aligned}}$

ist die Zykloide Lösung des Brachistochronenproblems.

B. Fermatsches Prinzip:

„Bei geg. Start- & Zielpunkt folgt ein Lichtstrahl einem Weg mit stationärer Laufzeit"

„Laufzeitfunktional"



$$F(y) = \int_0^a \sqrt{1+y'(x)^2}\; n(x,y(x))\, dx$$

„Brechungsindex"

Annahme: $n(x,y) = n(y)$

Euler Lagrange Gleichung $\frac{\partial}{\partial y} L = \frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial y'} L$ $(*)$

mit $L(y,y') = n(y)\sqrt{1+y'^2}$.

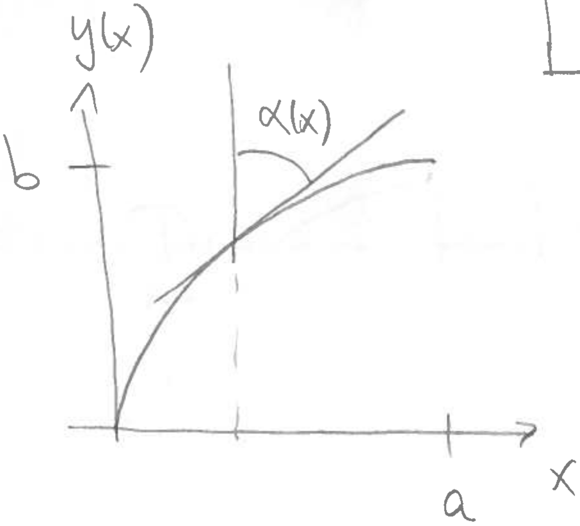
$$(*) \Leftrightarrow n'(y)\sqrt{1+y'^2} = \frac{d}{dx}\left[n(y)\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right]$$

$$= \frac{\left(n'(y)y'^2 + n(y)y''\right)(1+y'^2) - n(y)y'^2 y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{n'(1+y'^2) = n\,y''}$$

<u>Folgerungen</u> 1. Für $n'<0$ ist wg $n>0$ auch $y''<0$.
Also ist y konkav.
(Man sieht Sonne noch, wenn sie untergegangen ist!)

2. $\boxed{n(y)\sin(\alpha) = \text{konst.}}$ <u>Gesetz von Snellius</u>



wobei $\boxed{\tan^2\alpha(x) := \dfrac{1}{y'(x)^2}}$

<u>Beweis:</u> $$\text{Konst.} = L - y'\frac{\partial}{\partial y'}L = n\sqrt{1+y'^2} - \frac{y'^2 n}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$= \frac{n}{\sqrt{1+y'^2}} = n\sin(\alpha)$$

$\square$

$$1+y'^2 = 1+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$