

Einzeln Lösungen heißen auch spezielle Lösungen.

Falls jede spezielle Lösung durch Parameterwahl aus einer allgemeinen Lösung hervorgeht, nennt man die allg. Lösung vollständig. Eine spezielle Lösung heißt singulär, falls sie aus keiner allgem. Lösung durch Parameterwahl hervorgeht.

Beispiele: 1. Vollständige allgemeine Lösung des lin.

DGL-Systems 1. Ordnung:

$$\dot{x}(t) = A x(t) + b(t)$$

$$x(t) = e^{tA} x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} b(s) ds$$

(vgl. Kap. 10)

mit Parameter  $x_0 \in \mathbb{R}^m$ .

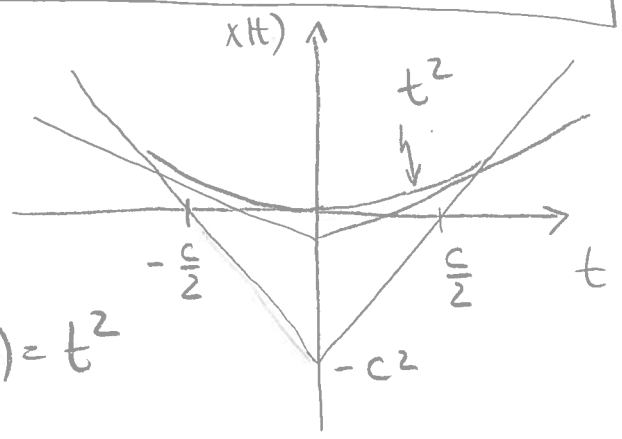
2. Implizite DGL 1. Ordnung:

$$\dot{x}(t)^2 - 4\dot{x}(t)t + 4x(t) = 0$$

Allgemeine Lösung:

$$x(t) = 2ct - c^2, \quad c \geq 0$$

Singuläre spezielle Lösung:  $x(t) = t^2$



3. DGL 1. Ordnung

$$\dot{x}(t) = \sqrt{|x(t)|}$$

Anfangswertproblem:  $x(0) = 0$

Lösungen: a)  $x(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$$b) x(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{4} & t \geq 0 \\ -\frac{t^2}{4} & t < 0 \end{cases}$$

Fragen:

1. Eindeutigkeit der Lösung des AWP?  
(Woher weiß man, dass man alle Lösungen gefunden hat?)
2. Wie findet man Lösungen?  
(Lösungsmethoden)

Bem:

Für lineare DGL-Systeme wurde dies in Kap 10 beantwortet!

## 20.2. Reduktion auf DGLer 1. Ordnung

(125)

Jede explizite DGL n-ter Ordnung

$$(*) \quad \boxed{x^{(n)}(t) = f(x^{(n-1)}(t), \dots, x^{(1)}(t), x(t), t)}$$

mit  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $U \subset \underbrace{\mathbb{R}^m \times \dots \times \mathbb{R}^m}_{n\text{-mal}} \times \mathbb{R}$  ist

"äquivalent zu einem DGL-System 1. Ordnung:

(\*\*)

$$\dot{y}_1(t) = y_2(t)$$

$$\dot{y}_2(t) = y_3(t)$$

$\vdots$

$$\dot{y}_n(t) = f(y_n(t), \dots, y_1(t), t)$$

Kurz:  $y(t) := \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \cdot m}$

$$g(y, t) := \begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ f(y_1, \dots, y_n, t) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\dot{y}(t) = g(y(t), t)}$$

Es gilt der folgende Satz:

Satz: 1. Ist  $x: I \rightarrow \mathbb{R}^m$  Lösung von  $(*)$ , so ist

$$y := \begin{pmatrix} x \\ x^{(1)} \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix} : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \cdot m}$$

Lösung von  $(**)$ .

2. Ist  $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \cdot m}$  Lösung von  $(**)$ , so ist  $x = y_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  Lösung von  $(*)$ .

Beweis: Einsetzen!  $\square$

Wir können uns im Folgenden somit auf DGL-Systeme 1. Ordnung beschränken.

Beispiel: Newtonsche Bewegungsgleichung:

$$\ddot{x}(t) = F(\dot{x}(t), x(t), t) \quad (*)$$

Setze  $p(t) = \dot{x}(t)$ . Dann ist  $(*)$  äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{p}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(t) \\ F(p(t), x(t), t) \end{pmatrix}$$

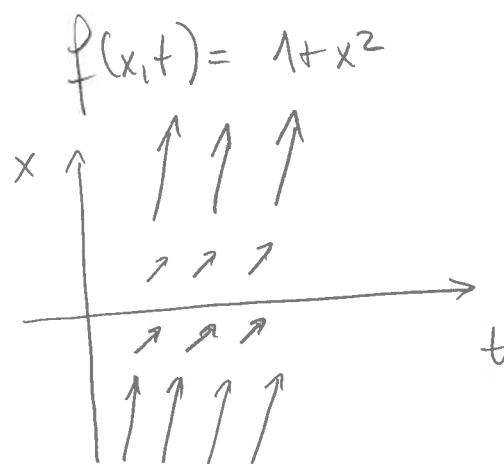
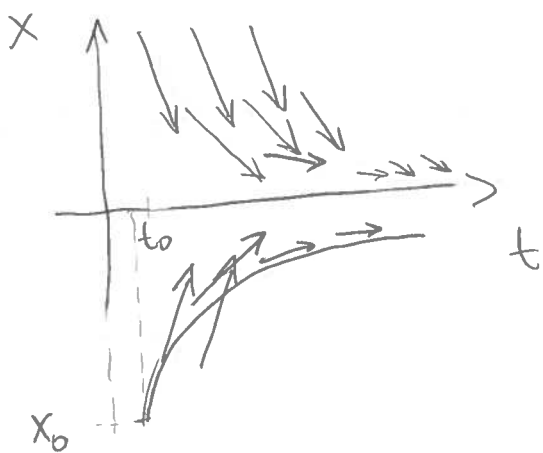
Graphische Veranschaulichung von Lösungen  
von DGL-Systemen 1. Ordnung:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) \quad (*)$$

Zeitabhängiges Vektorfeld  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$

a) Zeichne Richtungsfeld  $v(t, x) := \begin{pmatrix} 1 \\ f(x, t) \end{pmatrix}$

z.B.  $f(x, t) = -cx \in \mathbb{R}$



b) Jede spezielle Lösung von (\*) ist tangential  
an Richtungsfeld.

## 20.3. Existenz und Eindeigkeitsatz

Wir betrachten DGL-Systeme 1. Ordnung

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t)$$

mit zeitabhängigem Vektorfeld  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$

Def. Ein zeitabhängiges Vektorfeld  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$

offen genügt:

1. global einer Lipschitzbedingung mit Konstante  $L > 0$ , falls für alle  $(x_1, t), (x_2, t) \in U$ :

$$|f(x_1, t) - f(x_2, t)| \leq L |x_1 - x_2| \quad (*)$$

2. lokal einer Lipschitzbedingung, wenn jeder Pkt  $(x_0, t_0) \in U$  eine Umgebung  $V \subset U$  besitzt, so daß es eine Konstante  $L = L(x_0, t_0)$  gibt mit welcher (\*) gilt für alle  $(x_1, t), (x_2, t) \in V$ .

Bem: 1. Lipschitz-Stetigkeit nur bzgl. x-Variablen verlangt!

2. Ist  $f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ , dann ist die lokale Lipschitzbed. für Pkte in konvexen, kompakten  $K \subset U$  mit  $L = \sup_{(x,t) \in K} \|D_x f(x,t)\|$  erfüllt.

(12)

Beispiel:  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x,t) = |x|^p$  mit  $p \in (0, \infty)$ .

Für  $p \geq 1$  genügt  $f$  der lokale Lipschitzbed. mit

$$L(x_0, t) := \sup_{x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]} (p |x|^{p-1}) < \infty$$

Für  $p \in (0, 1)$  genügt  $f$  nicht der lok. Lipschitzbed.  
(bei  $x_0 = 0!$ )

Satz (Picard-Lindelöf) Es genüge  $f \in \mathcal{C}(U, \mathbb{R}^m)$  mit  $U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$  einer lokalen Lipschitzbedingung. Dann gibt es zu jeder Anfangsbedingung  $(x_0, t_0) \in U$  ein  $\varepsilon > 0$ , so daß das Anfangswertproblem  $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$  mit  $x(t_0) = x_0$  eine eindeutige Lösung  $x: (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m$  besitzt.

Beweis in 3 Schritten:

Schritt 1: Definition der Picard-Abbildung

a) Äquivalente Integralgleichung: Jede Lösung des

AWP genügt:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s), s) ds$$

und umgekehrt.

b) Wähle  $r > 0$  klein genug, so daß

$$V_r := \overline{U_r(x_0)} \times [t_0 - r, t_0 + r] \subset V$$

wobei  $V \subset U$  Umgebung von  $(x_0, t_0)$ , auf welcher die Lipschitzabschätzung  $|f(x_1, t) - f(x_2, t)| \leq L|x_1 - x_2|$  gilt.

Setze  $N := \max_{(x,t) \in V_r} |f(x,t)|$ ,  $\epsilon := \min\left\{r, \frac{r}{N}, \frac{1}{2L}\right\}$ .

Definitionsbereich der Picard-Abb.:

$$D := \mathcal{C}([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \overline{U_r(x_0)})$$

Picard-Abb.:

$$A: D \rightarrow D$$

$$(Ax)(t) := x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s), s) ds$$

$A$  bildet  $D$  in  $D$  ab, da für  $t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ :



$$|Ax(t) - x_0| \leq \int_{t_0}^t |f(x(s), s)| ds \leq N(t - t_0) \leq N\epsilon \leq r.$$

Schritt 2:  $D$  als vollständiger metrischer Raum

Lemma:  $V \subset \mathbb{R}^m$  abgeschlossen, und  $a < b$ . Der Raum  $\mathcal{C}([a, b], V)$  wird mit der Supremumsmetrik

$$d(f, g) := \sup_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)|$$

zum vollständigen metrischen Raum.

Beweisideen: Einfach zu zeigen:  $d$  ist Metrik.

• Vollständigkeit: Sei  $(f_n)$  Cauchy Folge. Da  $|f_k(t) - f_l(t)| \leq d(f_k, f_l)$  für alle  $t \in [a, b]$ , ist auch  $(f_n(t))$  Cauchy Folge in  $V$ . Da  $V$  abgeschlossen existiert  $f(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$  für alle  $t \in [a, b]$ .

Bleibt z.z.:  $f: [a, b] \rightarrow V$  ist stetig. Dazu für  $t_1, s \in [a, b]$ :

$$|f(t) - f(s)| \leq |f(t) - f_n(t)| + |f(s) - f_n(s)| + |f_n(s) - f_n(t)|$$

Sei  $\epsilon > 0$ . i)  $f_n$  stetig  $\Rightarrow \exists \delta > 0: \forall |s - t| < \delta: |f_n(s) - f_n(t)| < \frac{\epsilon}{3}$

ii)  $(f_n)$  Cauchy Folge  $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: \forall t \in [a, b]:$

$$|f(s) - f_n(s)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |f_k(s) - f_n(s)| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} d(f_k, f_n) < \frac{\epsilon}{3}$$

Schritt 3: Picard Abbildung ist Kontraktion:

Seien  $x, y \in D$  und  $I := [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$

$$d(Ax, Ay) = \sup_{t \in I} \left| \int_{t_0}^t f(x(s), s) ds - \int_{t_0}^t f(y(s), s) ds \right|$$

$\Delta$ -Ungl.  $\rightarrow$   $\leq \sup_{t \in I} \int_{\min(t_0, t)}^{\max(t_0, t)} |f(x(s), s) - f(y(s), s)| ds$

Lipschitz-bed.  $\rightarrow$   $\leq \sup_{t \in I} \int_{\min(t_0, t)}^{\max(t_0, t)} L \underbrace{|x(s) - y(s)|}_{\leq d(x, y)} ds$

$$\leq L \epsilon d(x, y)$$

Somit ist für  $L \epsilon < 1$ ,  $A$  eine Kontraktion.

Die Behauptung folgt somit aus dem Banachschen Fixpunktsatz.  $\square$

Bemerkung: Die Picard-Abb. liefert num. Algorithmen

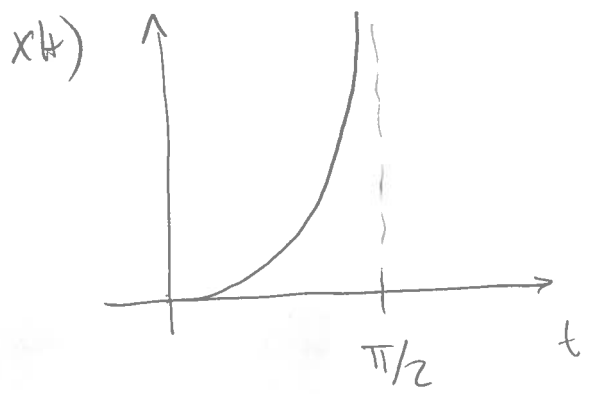
zur approx. Berechnung von Lösungen des AWP.

Besser num. Verfahren: Euler, Runge-Kutta, ...

Beispiel:  $\dot{x}(t) = 1 + x(t)^2$  AWP  $x(0) = 0$

$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x,t) = 1 + x^2$  genügt lok. Lip. bed.,  
aber keiner glob. Lip. bed. (Übung!)

Lösung des AWP:  $x(t) = \tan(t)$



Teilchen entweicht nach endlicher  
Zeit ( $\frac{\pi}{2}$ ) ins Unendliche!

Satz (Globale Existenz von Lösungen)

Genügt  $f: \mathbb{R}^m \times I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $I \subset \mathbb{R}$  Intervall  
einer globalen Lipschitzbed., dann existiert eine  
eindeutige Lösung  $x: I \rightarrow \mathbb{R}^m$  des AWP

$$\dot{x} = f(x,t), \quad x(t_0) = x_0$$

Beweisidee: Zusammensetzen der lokal eindeutigen  
Lösungen.

## 20.4. Erste Integrale - Lösungsmethoden

134

Def. Sei  $f \in \mathcal{C}(U, \mathbb{R}^m)$ ,  $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  offen, zeitabhäng. Vektorfeld der DGL  $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$  (\*)

$E \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$  heißt erstes Integral oder Konstante der Bewegung, wenn für jede Lösung  $x$  von (\*) die Funktion  $E \circ x$  konstant ist.

Beispiel: Hamiltonsche Differentialgleichungen

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{p}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_p H(p, x) \\ -\nabla_x H(p, x) \end{pmatrix}$$

mit Hamiltonfunktion  $H \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ .

z.B.  $H(p, x) = \frac{p^2}{2} + V(x)$ .

$H$  ist Konstante der Bewegung (Energie!)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(p(t), x(t)) &= \dot{x}(t) \cdot \nabla_p H(p, x) + \dot{p}(t) \cdot \nabla_x H(p, x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

135

Bem: 1. Sei  $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^m)$   $U \subset \mathbb{R}^m$  offen.

Dann ist  $E \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$  genau dann erstes Integral, wenn

$$\forall x \in U: f(x) \cdot \nabla E(x) = 0,$$

Vektorfeld  $f$  ist überall tangential zu den Niveauflächen von  $E$ !

2. Kennt man für  $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^m)$ ,  $U \subset \mathbb{R}^m$  offen,  $(m-1)$ -ste Integrale  $E_1, \dots, E_{m-1}$  und ist  $E_0 \in \mathbb{R}^{m-1}$  regulärer Wert von  $E: U \rightarrow \mathbb{R}^{m-1}$ , dann findet man eine Lösung des AWP  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x(0) = x_0$  durch geeignete Parametrisierung der 1dim. UMF  $E^{-1}(\{E_0\})$ , falls  $E(x_0) = E_0$ .

Lösungsmethoden, die auf dieser Vorgehensweise beruhen:

1. Trennung der Variablen:  $I, U \subset \mathbb{R}$  offene Intervalle

$f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ ,  $g \in \mathcal{C}^1(U, (0, \infty))$  mit  $t_0 \in I$ ,  $x_0 \in U$

so dass existieren:

$$F(t) := \int_{t_0}^t f(s) ds, \quad t \in I$$

$$G(x) := \int_{x_0}^x \frac{dy}{g(y)}, \quad x \in U.$$

Dann ist  $E: U \times I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E(x, t) := F(t) - G(x)$

erstes Integral von:  $\dot{x}(t) = f(t) g(x(t))$  (\*)

Begründung:  $\frac{d}{dt} E(x(t), t) = \partial_t E(x(t), t) + \partial_x E(x(t), t) \dot{x}(t)$

$$= f(t) - \frac{1}{g(x(t))} \dot{x}(t) = 0.$$

Auflösen von  $E(x, t) = \text{const}$  nach  $x$  ergibt Lösungen von (\*).

2. Exakte Differenzialgleichungen:  $U \subset \mathbb{R}^2$  offen, Sternförmig

$f, g \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$  mit  $g(x, t) \neq 0 \quad \forall (x, t) \in U$

und  $\partial_x f = \partial_t g$  (\*)

Aus (\*) folgt:  $\begin{pmatrix} g \\ f \end{pmatrix}: U \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist Gradientenfeld

mit Potential  $E: U \rightarrow \mathbb{R}$ :  $f = \partial_t E$ ,  $g = \partial_x E$

Dann ist  $E$  erstes Integral von  $\dot{x}(t) = - \frac{f(t, x(t))}{g(t, x(t))}$  (\*\*)

Begründung:  $\frac{d}{dt} E(x(t), t) = \partial_t E(x(t), t) + \partial_x E(x(t), t) \dot{x}(t)$   
 $= f(x(t), t) + g(x(t), t) \cdot \dot{x}(t) = 0$ .

3. Integrierender Faktor: Wie in 2. ohne (\*)

Anstelle dessen sei  $m: U \rightarrow \mathbb{R}$  ("integrierender Faktor"),  
so dass  $\begin{pmatrix} mg \\ mf \end{pmatrix}$  ein Gradientenfeld mit Potential  $E$  ist.

Dann ist  $E$  erstes Integral von (\*\*).

Begründung: (wie oben).

4. Kepler Problem:  $x(t) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ,  $p(t) \in \mathbb{R}^3$

$$\dot{x}(t) = p(t)$$

$$\dot{p}(t) = -\alpha \frac{x(t)}{|x(t)|^3}, \quad \alpha > 0,$$

Konstanten der Bewegung: (7 Stück)

• Energie:  $E(x, p) = \frac{1}{2} p^2 - \frac{\alpha}{|x|} \in \mathbb{R}$

• Drehimpuls:  $L(x, p) = x \times p \in \mathbb{R}^3$

• Runge-Lenz-Vektor:  $A(x, p) = \frac{1}{2} p \times L - \frac{x}{|x|} \in \mathbb{R}^3$

Nicht alle Erhaltungsgrößen sind unabhängig:

$A \perp L$  und  $E$  Funktion von  $A, L$ .

Betrachte  $\begin{pmatrix} L \\ A \end{pmatrix}: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^6$  eingeschränkt auf  $\{L \cdot A = 0\}$ . Dies reduziert DGL-System auf algebr.

Problem: Für  $L \perp A$  löse  $r \times p = L$ ,  $\frac{1}{2} p \times L - \frac{x}{|x|} = A$

Projektoren auf den Orbitsaum sind Keplerbahnen  
(Kegelschnitte)