

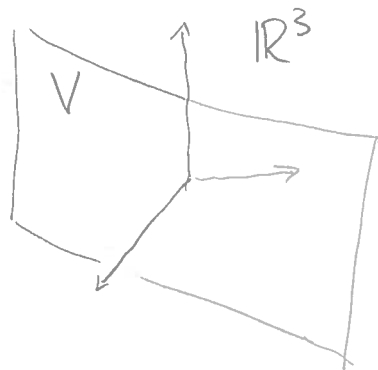
17. Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n

Erinnerung: Jeder k -dim. lineare Unterraum $V \subset \mathbb{R}^n$

läßt sich als Kern einer geeigneten linearen Abb.

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k} \text{ mit } V = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\} = \text{Kern } f$$

und $k = \dim \text{Kern } f = n - \text{Rang } f$, d.h. $\text{Rang } f = n - k$,
beschreiben.



Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$, die lokal wie k -dim. lineare
Unterräume aussehen, werden wir als k -dim. UMF
definieren. Dazu werden wir Funktionen $f: U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$
verwenden, die i.A. nicht-linear, aber genügend glatt
sind.

17.1. Definition und Charakterisierung

Im Folgenden: $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, \dots, n\}$, $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

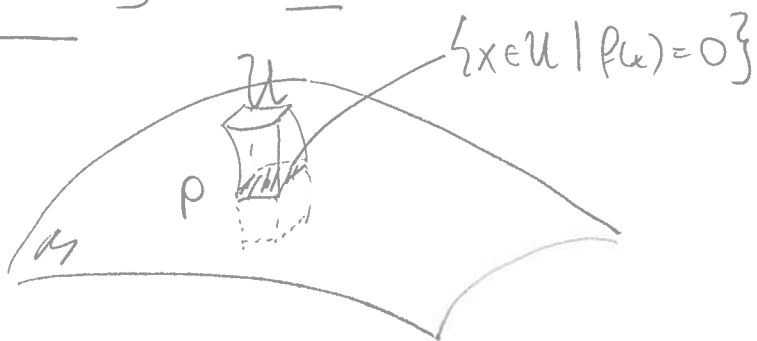
Dim. des umgebenden Raums \downarrow Dim. der UMF \downarrow Glättungsgrad

Def: $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine k -dim. \mathcal{C}^α -UMF,

wenn es zu jedem $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$
und $f \in \mathcal{C}^\alpha(U, \mathbb{R}^{n-k})$ mit $\text{Rang } Df(p) = n-k$ gibt mit

$$M \cap U = \{x \in U \mid f(x) = 0\}$$

" M ist lokal Lösungsmenge
einer nicht-lin. Gleichung"



Beispiele: 1. Jeder k -dim. Unterraum des \mathbb{R}^n ist eine \mathcal{C}^∞ -UMF

Dasselbe gilt für affine Unterräume.

2. Einheitskugel $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist

n -dim. \mathcal{C}^∞ -UMF, denn $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid f(x) = 0\}$ mit

$f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|^2 - 1$ und $\nabla f(x) = 2x \neq 0$ auf S^n .

3. Niveaumengen von $f \in \mathcal{C}^\alpha(U), U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $c \in \mathbb{R}$

$$N_c(f) = \{x \mid f(x) = c\}$$

sind $(n-1)$ -dim. \mathcal{C}^α -UMF falls $\nabla f(x) \neq 0$ für alle $x \in N_c(f)$.

(8)

Z.B. ist $H_c := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + c\}$, $c \neq 0$
 eine 2-dim. C^∞ -UMF in \mathbb{R}^3 (Hyperboloid - Übung)

Satz (Charakterisierung von UMFs durch Karten)

$M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine k -dim. C^α -UMF, wenn es für alle $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$, eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^k$ und einen Homöomorphismus $\phi: V \rightarrow U \cap M$ gibt mit $\phi \in C^\alpha(V, \mathbb{R}^n)$ und $\text{Rang } D\phi(x) = k \quad \forall x \in V$.

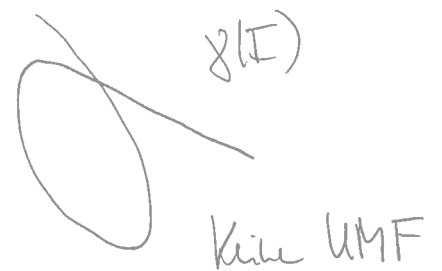


Def: Eine Abbildung $\phi: V \rightarrow U \cap M$ mit Eigenschaften wie in obigem Satz heißt Karte von M bei p .

Eine Familie (ϕ_j) von Karten heißt Atlas von M , falls $M \subset \bigcup_j (U_j \cap M)$.

(87)

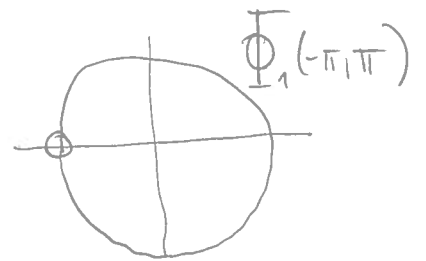
Beispiele: 1. Die Spur $\gamma(I)$ einer C^k -Kurve $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall, ist eine 1-dim. C^k -UMF, genau dann wenn $\gamma'(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$ und $\phi: I \rightarrow \gamma(I)$, $\phi(t) = \gamma(t)$ ein Homöomorphismus ist. Dann ist ϕ eine Karte (und Atlas) von $\gamma(I)$.



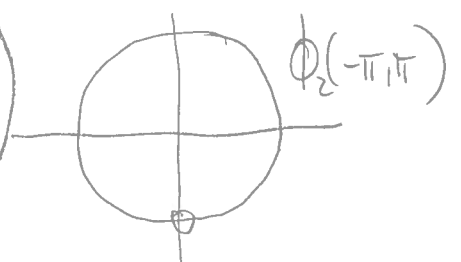
2. Einheitsphäre $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = 1\} \subset \mathbb{R}^2$

Möglicher Atlas $(\phi_j)_{j \in \{1,2\}}$:

$$\phi_1: (-\pi, \pi) \rightarrow S^1 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \phi_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$



$$\phi_2: (-\pi, \pi) \rightarrow S^1 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad \phi_2(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$



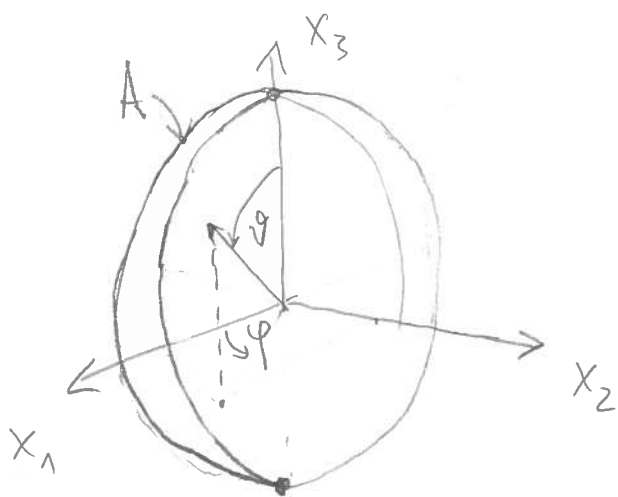
Bem: I.A. ist mehr als eine Karte zur Beschreibung von M nötig!

17.2. Kartenwechsel: Koordinatentransfos

Durch Karten werden lokale Koordinatensysteme auf der UMF festgelegt.

Beispiel: $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\}$

1. Polarkoordinaten: $\phi: (-\pi, \pi) \times (0, \pi) \rightarrow S^2 \setminus A$



$$\phi(\varphi, \vartheta) := \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

Karte von $S^2 \setminus A$

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} -\sin \vartheta \\ 0 \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \mid \vartheta \in [0, \pi] \right\}$$

2. Stereographische Koordinaten:

(vgl. Tutorübung T.3.3.)

$$\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 / (1 + |x|^2) \\ 2x_2 / (1 + |x|^2) \\ (1 - |x|^2) / (1 + |x|^2) \end{pmatrix}$$

Karte von S^2 ohne

"Südpol" $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in A$.

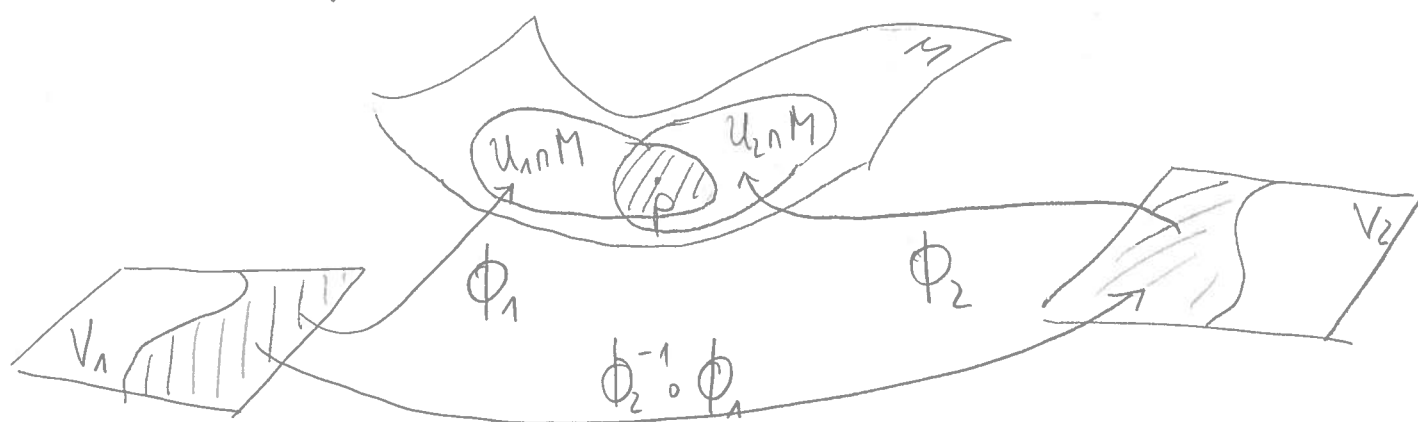
Ein Koordinatenwechsel auf $S^2 \setminus A$ ist durch

$$\psi^{-1} \circ \Phi : (-\pi, \pi) \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x_1 \in (-\infty, 0] \right\}$$

$$\psi^{-1} \circ \Phi(\varphi, \vartheta) = \left(\frac{\cos \varphi \sin \vartheta}{1 + \cos \vartheta}, \frac{\sin \varphi \sin \vartheta}{1 + \cos \vartheta} \right)$$

$$\psi^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{1+x_3}, \frac{x_2}{1+x_3} \right) \quad \text{vgl. Tutorübung}$$

gegeben. Wie jede Koordinatentransformation ist $\psi^{-1} \circ \Phi$ ein Diffeomorphismus. Allgemein gilt:



Verhalten unter Kartenwechsel

$$\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 : V_1' := \Phi_1^{-1}(U_1 \cap U_2 \cap M) \rightarrow V_2' := \Phi_2^{-1}(U_1 \cap U_2 \cap M)$$

für überlappende Karten $\Phi_j : V_j \rightarrow U_j \cap M \quad j=1,2$

$$U_1 \cap U_2 \neq \emptyset.$$

Satz (Kartenwechsel)

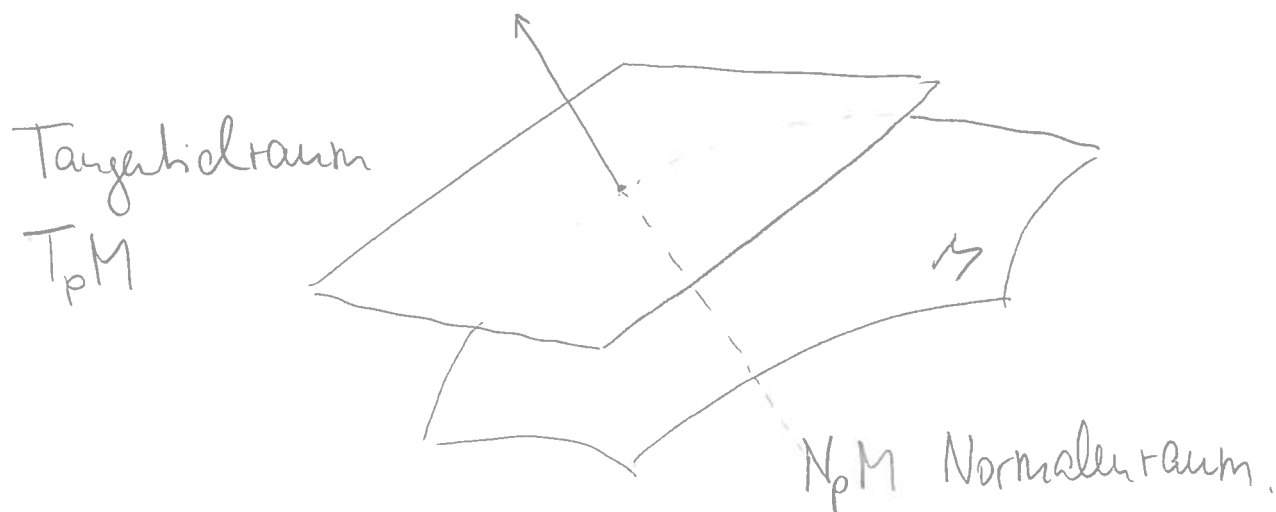
Sind ϕ_1, ϕ_2 zwei überlappende Karten einer \mathcal{C}^α -UMF wie oben, dann sind V_1' und V_2' offen im \mathbb{R}^k und der Kartenwechsel

$$\phi_2^{-1} \circ \phi_1 : V_1' \rightarrow V_2'$$

ist ein \mathcal{C}^α -Diffeomorphismus.

17.3. Tangential- und Normalenraum

k -dim. UMF $M \subset \mathbb{R}^n$ werden lokal, d.h. nahe jedem $p \in M$, durch k -dim. affine Räume $p + T_p M$ approximiert



Def: Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dim. C^1 -UMF und $p \in M$.

- $v \in \mathbb{R}^n$ heißt Tangentenvektor an M bei p , wenn es eine C^1 -Kurve $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ mit geeignetem $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = v$.

Die Menge aller Tangentenvektoren heißt der Tangentenraum an M bei p und wird mit $T_p M$ bezeichnet.

- $N_p M := (T_p M)^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \cdot v = 0 \ \forall v \in T_p M\}$ heißt Normalenraum an M bei p . Seine Elemente heißen Normalenvektoren an M bei p .

Bemerkung: $T_p M$ ist k -dim. Unterraum des \mathbb{R}^n
 $N_p M$ - $(n-k)$ -dim.

Bsp: Spur $\gamma(I)$ von S . $T_p \gamma(I) = \mathbb{R} \gamma'(a)$ mit $\gamma(a) = p$

Satz (Charakterisierung von $T_p M$ und $N_p M$)

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ k -dim. \mathcal{C}^1 -UMF und $p \in M$.

1. Ist $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ Karte von M bei $p \in U$, dann:

$$T_p M = \text{Bild } D\phi(a) \quad \text{mit } p = \phi(a)$$

(d.h. Spaltenvektoren von $D\phi(a)$ bilden Basis von $T_p M$)

2. Ist $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^{n-k})$ mit $p \in U$ und $\text{Rang } Df(p) = n-k$
 und $M \cap U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$, dann gilt:

$$T_p M = \text{Kern } Df(p)$$

$$N_p M = \text{span} \{ \nabla f_1(p), \dots, \nabla f_{n-k}(p) \}$$

(d.h. Zeilenvektoren von $Df(p)$ bilden Basis von $N_p M$)

Beweis: Aussagen über $T_p M$ folgt aus:

$$i) \text{ Bild } D\phi(a) \subset T_p M \subset \text{Kern } Df(p)$$

$$ii) \dim \text{Bild } D\phi(a) = \text{Rang } D\phi(a) = k = n - \text{Rang } Df(p) = \dim \text{Kern } Df(p) \quad \checkmark$$

Zum Beweis von i):

Sei $v \in \text{Bild } D\phi(a)$, d.h. $v = D\phi(a)w$ mit $w \in \mathbb{R}^k$. Für genügend kleines $\varepsilon > 0$ ist für $|t| < \varepsilon$:

$$\gamma(t) := \phi(a + tw) \quad \text{Kettenregel}$$

eine C^1 -Kurve mit $\gamma(0) = \phi(a) = p$ und $\gamma'(0) \stackrel{\downarrow}{=} D\phi(a)w = v$.

Also: $v \in T_p M$.

Sei $v \in T_p M$. Wähle Kurve $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, $\gamma'(0) = v$, $\gamma(0) = p$.

$$\text{Dann: } f(\gamma(t)) = 0 \quad \forall |t| < \varepsilon$$

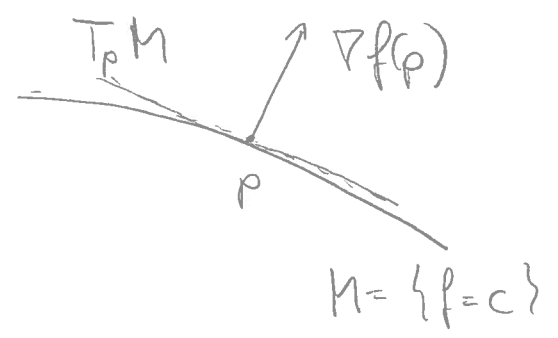
$$\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \Big|_{t=0} \stackrel{\uparrow}{\text{Kettenregel}} = Df(p) \gamma'(0) = Df(p) v.$$

Also: $v \in \text{Kern } Df(p) \quad \square$

Behauptung über $N_p M$ folgt aus:

$$N_p M = (T_p M)^\perp = (\text{Kern } Df(p))^\perp = \text{span} \{ \nabla f_1(p), \dots, \nabla f_{n-k}(p) \}$$

Bemerkung: Für $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ und $c \in \mathbb{R}$ regulärer Wert von f ist die Niveaumenge $M = f^{-1}(c)$ eine $(n-1)$ -dim. C^1 -UMF. Obiger Satz zeigt, daß $\nabla f(p)$ stets senkrecht auf $T_p M$ steht.



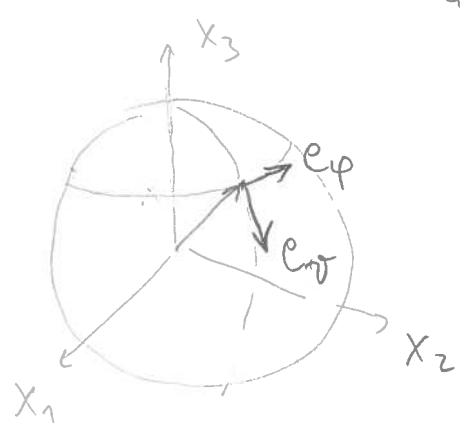
Beispiel $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x|=1\}$

Kugelkoordinaten $\phi: (-\pi, \pi) \times (0, \pi) \rightarrow S^2 \setminus A$

$$D\phi(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \sin \vartheta & \cos \varphi \cos \vartheta \\ \cos \varphi \sin \vartheta & \sin \varphi \cos \vartheta \\ 0 & -\sin \vartheta \end{pmatrix}$$

Normierte DN Basis von $T_{\phi(\varphi, \vartheta)} S^2$: $e_\varphi := \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_\vartheta := \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta \\ \sin \varphi \cos \vartheta \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix}$

von $N_{\phi(\varphi, \vartheta)} S^2$: $e_\varphi \times e_\vartheta$



17.4. Riemannsche Metrik

Def: Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ k -dim. C^1 -UMF. Dann heißt die bilineare Abbildung:

$$g_p: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(v, w) \mapsto g_p(v, w) := v \cdot w$$

↑ Eukl. Skalarprodukt

der euklidische metrische Tensor von M bei p .

Gemäß Satz 5.12 bilden die Vektoren

$$\partial_j \phi(a) \quad j=1, \dots, k \quad (\phi(a)=p)$$

eine Basis von $T_p M$. Bezüglich dieser Basis sind

$$(g_p^\phi)_{j,l} := \partial_j \phi(a) \cdot \partial_l \phi(a) \quad j, l=1, \dots, k$$

die Komponenten des metrischen Tensors.

(90)

Es gilt: $(g_p^\phi)_{jle} = \left[(D\phi(a))^T D\phi(a) \right]_{je}, j, l = 1, \dots, k.$

Beispiel: Metrischer Tensor von S^2 bei $p \in S^2 \setminus \{A\}$.

$$D\phi(\varphi, \vartheta)^T D\phi(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} \sin^2 \vartheta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = g_{\phi(p, \vartheta)}^\phi$$

(Darstellung von g_p bzgl. Basis $\sin \vartheta e_\varphi, e_\vartheta$)

Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$ und $h: (-\pi, \pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}, g(\varphi, \vartheta) = f(\phi(\varphi, \vartheta))$

Der Gradient von h ist abzulesen aus:

$$\left(\partial_\varphi h(\varphi, \vartheta) \quad \partial_\vartheta h(\varphi, \vartheta) \right) = Dh(\varphi, \vartheta) \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \underbrace{Df(\phi(\varphi, \vartheta))}_{\left((\nabla f(\phi(\varphi, \vartheta)))^T \right)} D\phi(\varphi, \vartheta)$$

Auflösen nach ∇f

$$\Rightarrow \nabla f(\phi(\varphi, \vartheta)) = \frac{1}{\sin \vartheta} \partial_\varphi h(\varphi, \vartheta) e_\varphi + (\partial_\vartheta h)(\varphi, \vartheta) e_\vartheta$$