15 Implizit definierte & inverse Funktionen

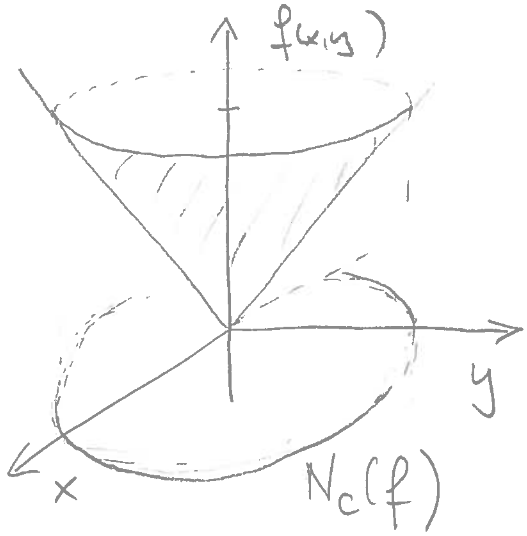
15.1. Problemstellung & Beispiele

Betrachte für $f: U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}^m$ mit $U_1 \subset \mathbb{R}^k$, $U_2 \subset \mathbb{R}^m$ die Niveaumenge $N_c(f) := \{(x,y) \in U_1 \times U_2 \mid f(x,y) = c\} \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ zu $c \in \mathbb{R}^m$.

Frage: Läßt sich $N_c(f)$ lokal parametrisieren, d.h.

$\exists\, g: U_1 \to U_2: \quad f(x, g(x)) = c$?

Beispiele: 1. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$



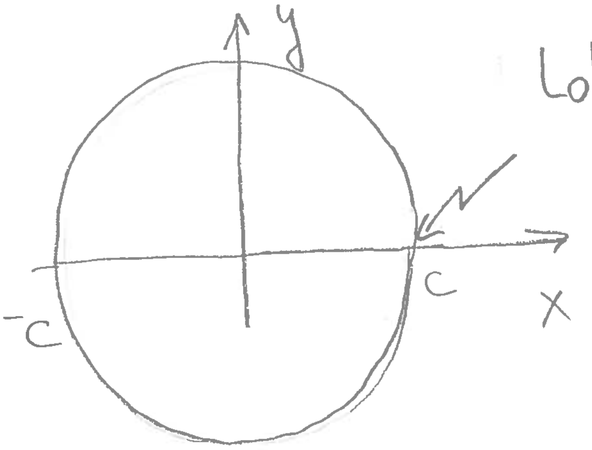
Niveaumenge zu $c > 0$:

$N_c(f)$ = Kreislinie in $\mathbb{R}^2$ mit Radius c.

Darstellbarkeit von $N_c(f)$ lokal als Graph einer (stetigen) Funktion g mit $f(x, g(x)) = c$ $(*)$?

(Sprechweise: g implizit durch $(*)$ definiert)

Problem ist nur mit Einschränkung lösbar. z.B. gibt es für $x = \pm c$ keine Umgebung von x auf der g definiert ist, so daß $\sqrt{x^2+g(x)^2} = c$.



Lokal hier nicht als Graph $y = g(x)$ darstellbar. Aber Auflösen nach y möglich: $x = h(y)$.

2. Lineare Gleichungssysteme: $A \in \mathrm{Mat}(k \times m, \mathbb{R})$, $B \in \mathrm{Mat}(m, \mathbb{R})$

$$f: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, (x,y) \mapsto Ax + By$$

Für $c \in \mathbb{R}^m$ ist $N_c(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \mid Ax + By = c\}$ eine Hyperfläche im $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$.

Falls $\det B \neq 0$, d.h. B invertierbar, gilt für

$$g: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m, g(x) := B^{-1}(c - Ax) = B^{-1}c - B^{-1}Ax$$

und alle $x \in \mathbb{R}^k$: $f(x, g(x)) = c$.

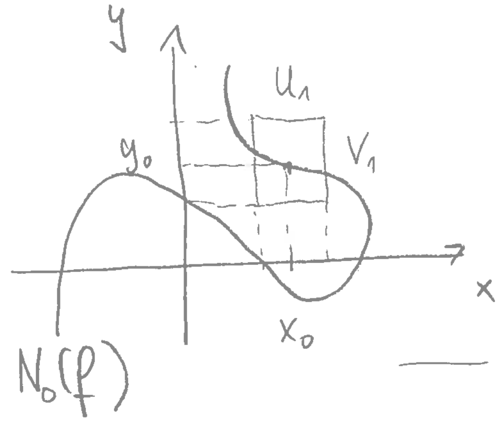
Beachte: $B = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(x,y) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(x,y) \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(x,y) & & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(x,y) \end{pmatrix} =: D_y f(x,y)$.

15.2. Satz über implizite Funktionen

<u>Satz</u> (Vereinfachte Variante) Sei $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U} \times V)$, $\mathcal{U}, V \subset \mathbb{R}$ offen und $x_0 \in \mathcal{U}$, $y_0 \in V$ mit $f(x_0, y_0) = 0$ und $\partial_2 f(x_0, y_0) \neq 0$.
Dann gibt es offene Intervalle $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}$, $V_1 \subset V$ mit $x_0 \in \mathcal{U}_1$, $y_0 \in V_1$ und genau ein $g \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}_1, V_1)$ mit

$$\text{Graph } g = N_0(f) \cap (\mathcal{U}_1 \times V_1)$$

d.h. $f(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in \mathcal{U}_1$



<u>Beispiele</u>: 1. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} - c$ mit $c > 0$

$x_0 \in (-c, c)$, $y_0 = \sqrt{c^2 - x_0^2}$: $\quad f(x_0, y_0) = 0$

$$\partial_2 f(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \partial_2 f(x_0, y_0) = \frac{\sqrt{c^2 - x_0^2}}{c} > 0$$

Somit gibt es $\varepsilon > 0$, so daß

$$g : (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \sqrt{c^2 - x^2}$$

wohldefiniert und $f(x, g(x)) = 0$.

2. $f(x,y) = ax + by$ mit $b \neq 0$ und $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$: $f(x_0, y_0) = 0$.
Dann gilt für $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -\frac{ax}{b}$: $\quad f(x, g(x)) = 0$.

Beweisidee und Bemerkungen:

1. Aus der Stetigkeit von $\partial_2 f$ und $\partial_2 f(x_0, y_0) \neq 0$ folgt:
$\exists$ offene Umgebungen $U_1 \subset U$, $V_1 \subset V$ von x_0, y_0:
$$\partial_2 f(x,y) \neq 0 \quad \text{für alle } x \in U_1,\ y \in V_1 \qquad (*)$$

2. Die gesuchte Funktion $g: U_1 \to V_1$ genügt der DGL:
$$0 = \frac{d}{dx} f(x, g(x)) = \partial_1 f(x, g(x)) + \partial_2 f(x, g(x))\, g'(x)$$
$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \quad \boxed{g'(x) = -\frac{1}{\partial_2 f(x, g(x))}\, \partial_1 f(x, g(x))}$$

Wir werden später zeigen, daß diese DGL unter den Vor. des Satzes eine eindeutige Lösung $g: [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \to \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$ klein genug besitzt.

3. Die Eindeutigkeit der Funktion $g: U_1 \to V_1$ ist leicht einzusehen. Gäbe es zu $x \in U_1$ ein Paar $y < y'$ mit $f(x,y) = f(x,y') = 0$, dann folgt aus dem Mittelwertsatz:
$$\exists\, \eta \in (y, y'): \quad 0 = \frac{f(x,y) - f(x,y')}{y - y'} = \partial_2 f(x, \eta) \quad \lightning$$

Allgemeiner Fall: $f: U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}^m$, $U_1 \subset \mathbb{R}^k$, $U_2 \subset \mathbb{R}^m$

$$(x,y) \mapsto f(x,y)$$

Abkürzungen: $$D_x f := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_k} \end{pmatrix} =: \frac{\partial (f_1, \dots, f_m)}{\partial (x_1, \dots x_k)}$$

$$D_y f := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_m} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{pmatrix} =: \frac{\partial (f_1 \dots f_m)}{\partial (y_1 \dots y_m)}$$

Satz (über implizite Funktionen - allgeine Variante)

Sei $f \in \mathcal{C}^\alpha(U \times V, \mathbb{R}^m)$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{R}^k$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offen und $x_0 \in U$, $y_0 \in V$ mit $f(x_0, y_0) = 0$ und $\det D_y f(x_0, y_0) \neq 0$.

Dann gibt es offene Umgebungen $U_1 \subset U$, $V_1 \subset V$ von x_0, y_0 und genau eine Funktion $g \in \mathcal{C}^\alpha(U_1, V_1)$ mit

$$\text{Graph } g = N_0(f) \cap (U_1 \times V_1)$$

d.h. $f(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in U_1$. Weiter gilt für $x \in U_1$

$$Dg(x) = -\left(D_y f(x, g(x))\right)^{-1} \cdot D_x f(x, g(x))$$

Für lineare Funktionen $f: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $f(x,y) = Ax + By$ ist die Aussage evident. Der Beweis der allg. Aussage stützt sich auf Linearisierung (vgl. Königsberger).

I.A. kann man nicht erwarten, daß zur Parametrisierung von $N_0(f)$ die ersten k Koordinaten verwendet werden können.

Lemma: Sei $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{k+m}$ offen.
Ist $x \in N_0(f)$ regulärer Punkt, d.h. $\operatorname{Rang} Df(x) = m$, dann gibt es Koordinaten $1 \le i_1 \le \ldots \le i_m \le k+m$, so daß

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_1}}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_m}}(x) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_{i_1}}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_{i_m}}(x) \end{pmatrix} \text{ invertierbar.}$$

Beweis: $\operatorname{Rang} Df(x) = m$ ist max. Anzahl lin. unabh. Spaltenvektoren (od. Zeilenvektoren). Daher kann man Spalten $i_1 \ldots i_m$ finden, um eine quadratische Untermatrix von $Df(x)$ zu erzeugen, welche invertierbar ist. $\square$

<u>Beispiel:</u> $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} - c$ mit $c > 0$

$$Df(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$$

Für $(x,y) \in N_0(f)$ ist $\operatorname{Rang} Df(x,y) = \operatorname{Rang}\left(\frac{x}{c} \ \frac{y}{c}\right) = 1$.

In der Umgebung von $(c,0) \in N_0(f)$ läßt sich $N_0(f)$ lokal durch y parametrisieren: $f(\underbrace{\sqrt{c^2-y^2}}_{=:g(y)}, y) = 0 \quad \forall |y| < c$

15.3. Diffeomorphismen & Satz über die Umkehrabbildung

Def: Bijektive Abbildungen $f: U \to V$, $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen heißen:
1. Homöomorphismen, falls f, f^{-1} stetig.
2. Diffeomorphismen, falls $f, f^{-1} \in \mathcal{C}^1$

   Gilt $f, f^{-1} \in \mathcal{C}^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{N}$ spricht man von $\mathcal{C}^\alpha$-Diffeomorphismen.

<u>Beispiele:</u> 1. Sei $A \in Mat(n, \mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ und

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x) := Ax + b$

Dann ist f genau dann Diffeomorphismus, wenn A invertierbar.
Dann gilt: $f^{-1}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f^{-1}(x) = A^{-1}(x-b)$.

2. Inversion am Einheitskreis $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$f(x) := \frac{x}{|x|^2}$ ist Diffeomorphismus mit $f^{-1}(x) = f(x)$.

3. Ebene Polarkoordinaten $f: (0,\infty) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$

$f(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$ ist nicht surjektiv, also insbesondere kein Diffeomorphismus. Aber: f ist lokaler Diffeomorphismus.

<u>Def:</u> $f: U \to \mathbb{R}^n$ mit $U \subset \mathbb{R}^n$ offen heißt lokaler (C^α-) Diffeomorphismus (mit $\alpha \in \mathbb{N}$), falls jeder Pkt $x \in U$ eine offene Umgebung $U_x \subset U$ besitzt, so daß die Restriktion $f|_{U_x}: U_x \to f(U_x)$ ein (C^α-)Diffeomorphismus ist.

Satz (über Umkehrabbildung)

Für $U \subset \mathbb{R}^n$ offen ist $f \in \mathcal{C}^\alpha(U, \mathbb{R}^n)$ mit $\alpha \in \mathbb{N}$ genau dann lokaler $\mathcal{C}^\alpha$-Diffeomorphismus, wenn für alle $x \in U$ gilt:

$$Df(x) \text{ invertierbar.}$$

Bemerkung: Offensichtlich für lineare Abb. $f(x) = Ax + b$!

Beweis: „$\Rightarrow$":

f lok. Diffeo und $x \in U$. Sei $g: f(U_x) \to U_x$ Umkehrfunktion von $f|_{U_x}: U_x \to f(U_x)$. Dann:

$$\mathbb{1} = D(g \circ f)(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Kettenregel}}}{=} Dg(f(x))\, Df(x)$$

Also $Df(x)$ invertierbar mit $Df(x)^{-1} = Dg(f(x))$.

„$\Leftarrow$":

Satz über implizite Funktionen für

$$F: \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n, \ (\xi, x) \mapsto F(\xi, x) := -\xi + f(x)$$

Es gilt: i) $D_x F(\xi, x) = Df(x)$ invertierbar

ii) $F(f(x), x) = 0$

Also gibt es Umgebung V_x von $f(x)$, W_x von x und genau ein $g \in \mathcal{C}^\alpha(V_x, W_x)$ mit

$$\forall \xi \in V_x : \quad 0 = F(\xi, g(\xi)) = -\xi + f(g(\xi))$$

Setze $U_x := g(V_x)$. Dann gilt U_x ist offen (Übung!),

$g : V_x \to U_x$ ist surjektiv und injektiv.

Letzteres folgt aus $f(g(\xi)) = \xi \;\; \forall \xi \in V_x$.

Insbesondere ist $f^{-1} = g : V_x \to U_x$ lokale Umkehrfkt. aus $\mathcal{C}^\alpha$. $\square$

<u>Bemerkung</u>: Obiger Beweis zeigt:

$$\boxed{(Df^{-1})(f(x)) = (Df(x))^{-1}}$$