Ziel: Taylorsche Formel als mehrdimensionales Polynom (vom Grad k)!

Def: $p = (p_1, \dots, p_m) \in \mathbb{N}_0^m$ heißt *Multiindex*.

i) *Ordnung von p*: $|p| := p_1 + \dots + p_m$

ii) *Fakultät von p*: $p! = p_1! \cdot \ldots \cdot p_m!$

Für $x \in \mathbb{R}^m$ schreibt man: $x^p := x_1^{p_1} \cdot \ldots \cdot x_m^{p_m}$

Für $f \in \mathcal{C}^{|p|}(\mathbb{R}^m)$ — $D^p f := \dfrac{\partial^{|p|}}{\partial^{p_1} x_1 \dots \partial^{p_m} x_m}$

Praktische Schreibweise für reelle Polynome in m Variablen

$$\sum_{p \in \mathbb{N}_0^m} c_p \, x^p =: P(x)$$

wobei alle bis auf endl. viele $c_p \in \mathbb{R}$ Null sind.

Grad von P ist $|p|$, falls $c_p \neq 0$ und $c_{p'} = 0$ für alle $p' \in \mathbb{N}_0^m$ mit $|p'| > |p|$.

Lemma (Multinomische Formel – vgl. Übung)

Für $x \in \mathbb{R}^m$ und $k \in \mathbb{N}$: $(x_1 + \ldots + x_m)^k = k! \sum_{\substack{p \in \mathbb{N}_0^m \\ |p| = k}} \frac{x^p}{p!}$

Einfache Folgerung: $v \in \mathbb{R}^m$, $f \in \mathcal{C}^k(U)$, $U \subset \mathbb{R}^m$ offen

$$D_v^{(k)} f = (v_1 \partial_1 + \ldots + v_m \partial_m)^k f$$

$$= k! \sum_{|p| = k} \frac{v^p}{p!} D^p f$$

Satz (von Taylor in Mehrdimensionalen II)

Unter den Vor. des Satzes S.53 läßt sich schreiben:

$$f(x) = \sum_{|p| \le k} \frac{(D^p f)(a)}{p!} v^p + R_{k+1}(x) \quad , \quad v := x - a$$

Es gibt $\xi \in [0,1]$: $R_{k+1}(x) = \sum_{|p| = k+1} \frac{(D^p f)(a + \xi v)}{p!} v^p$

Es gilt $R_{k+1}(x) = O(|v|^{k+1})$ für $|v| \to 0$.

<u>Def</u>: Für $f \in \mathcal{C}^k(\mathcal{U})$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ offen, konvex heißt

$$T_k f(x;a) := \sum_{|p| \le k} \frac{(D^p f)(a)}{p!} v^p \quad \text{mit} \quad v := x-a$$

Taylorpolynom der Ordnung k von f um $a \in \mathcal{U}$.

<u>Beispiel</u> (aus den Übungen): $m=2$, $k=3$, $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^2)$

$$T_3 f(x;a) = f(a) + \underbrace{(\partial_1 f)(a) v_1 + (\partial_2 f) v_2}_{= v \cdot (\nabla f)(a)}$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2}(\partial_1^2 f)(a) v_1 v_2 + (\partial_1 \partial_2 f)(a) v_1 v_2 + \frac{1}{2}(\partial_2^2 f)(a) v_2^2}_{= \frac{1}{2} v \cdot \begin{pmatrix} \partial_1^2 f(a) & \partial_1 \partial_2 f(a) \\ \partial_2 \partial_1 f(a) & \partial_2^2 f(a) \end{pmatrix} v}$$

$$+ \frac{1}{6}(\partial_1^3 f)(a) v_1^2 + \frac{1}{2}(\partial_1^2 \partial_2 f)(a) v_1^2 v_2 + \frac{1}{2}(\partial_2^2 \partial_1 f)(a) v_2^2 v_1 + \frac{1}{6}(\partial_2^3 f)(a) v_2^3$$

14.2. Hessematrix

Def: Für $f \in \mathcal{C}^2(U)$, $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $x \in U$ heißt die symmetrische Matrix

$$H_f(x) := \begin{pmatrix} \partial_1^2 f(x) & \cdots & \partial_1 \partial_m f(x) \\ \vdots & & \\ \partial_m \partial_1 f(x) & \cdots & \partial_m^2 f(x) \end{pmatrix}$$

Hessematrix von f im Punkt x.

Geometrische Interpretation des Taylorpolynoms

i) 1. Ordnung: $\{ (x, f(a) + (x-a) \cdot \nabla f(a)) \mid x \in U \}$

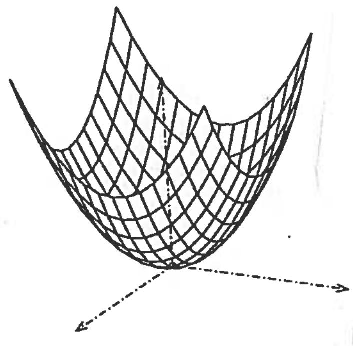
Tangentialfläche an den Graph von f im Pkt $a \in U$

ii) 2. Ordnung: $\{ (x, f(a) + (x-a) \cdot \nabla f(a) + \frac{1}{2} (x-a) \cdot H_f(a)(x-a)) \mid x \in U \}$

Fläche zweiter Ordnung

Beispiele für Flächen 2. Ordnung im $\mathbb{R}^2$:

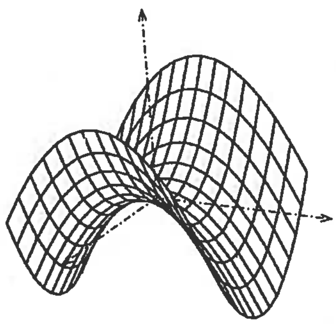
1. Elliptischer Paraboloid:



$$f(x_1,x_2) = \underset{(-)}{+}(x_1^2+x_2^2) = \frac{1}{2}\, x \cdot H_f(0)\, x$$

$$H_f(x) = \pm \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

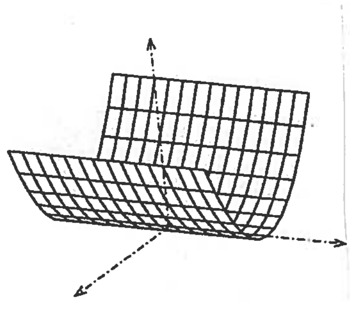
2. Hyperbolischer Paraboloid:



$$f(x_1,x_2) = x_1^2 - x_2^2 = \frac{1}{2}\, x \cdot H_f(0)\, x$$

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

3. Parabolischer Zylinder:



$$f(x_1,x_2) = \underset{(-)}{+} x_1^2 = \frac{1}{2}\, x \cdot H_f(0)\, x$$

$$H_f(x) = \underset{(-)}{+}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1,x_2) = \cos(x_1)\cos(x_2)$ (vgl. S. 42)

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} -\sin(x_1)\cos(x_2) \\ -\cos(x_1)\sin(x_2) \end{pmatrix} \qquad H_f(x) = \begin{pmatrix} -\cos(x_1)\cos(x_2) & \sin(x_1)\sin(x_2) \\ \sin(x_1)\sin(x_2) & -\cos(x_1)\cos(x_2) \end{pmatrix}$$

$$T_2 f\left(x, \begin{pmatrix} \pi/2 \\ -\pi/2 \end{pmatrix}\right) = -\left(x_1 - \frac{\pi}{2}\right)\left(x_2 - \frac{\pi}{2}\right) \qquad (\text{„Sattelfläche“})$$

<u>Erinnerung</u>: Klassifikation symm. Matrizen

<u>Def</u>: Eine symmetrische Matrix $A = A^T \in Mat(m, \mathbb{R})$ heißt:

i) <u>pos. definit</u> $(A > 0)$, falls $x \cdot Ax > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$

ii) <u>neg. —</u> $(A < 0)$ — < 0 —

iii) <u>definit</u>, wenn $A > 0$ oder $A < 0$.

iv) <u>indefinit</u>, wenn $\exists x, y \in \mathbb{R}^m$: $x \cdot Ax > 0$ und $y \cdot Ay < 0$

v) <u>pos. semidefinit</u> $(A \geq 0)$, falls $x \cdot Ax \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^m$

vi) <u>neg. —</u> $(A \leq 0)$, — ≤ 0 —

vii) <u>semidefinit</u>, falls $A \geq 0$ oder $A \leq 0$.

<u>Beispiel</u>: Diagonalmatrix $A = \operatorname{diag}(a_1, \ldots a_m) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_m \end{pmatrix}$

i) $A \underset{(>)}{\geq} 0 \iff \forall j = 1 \ldots m: \quad a_j \underset{(>)}{\geq} 0$

ii) $A \underset{(<)}{\leq} 0 \iff$ — $a_j \underset{(<)}{\leq} 0$

iii) A indefinit $\iff \exists\, a_j > 0$ und $a_k < 0$

<u>Erinnerung</u>: Jede symm. Matrix $A = A^T \in Mat(m, \mathbb{R})$ läßt sich orthogonal diagonalisieren, d.h. $\exists$ orth. $O \in Mat(m, \mathbb{R})$:

$$A = O^T \operatorname{diag}(a_1, \ldots a_m)\, O$$

Somit gilt:

i) $A \underset{(}{\overset{}{\geq}}{}_{)} 0 \iff$ alle Eigenwerte $\underset{(}{\geq}{}_{)} 0$

ii) $A \underset{(}{\leq}{}_{)} 0 \iff$ — " — $\underset{(}{\leq}{}_{)} 0$

iii) A indefinit $\iff$ es gibt pos. & neg. Eigenwerte

Satz (Silvester)

$$A = A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} > 0$$

$$\iff \forall k = 1, \ldots, n : \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} \geq 0$$

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix} > 0$

$$\iff \alpha > 0 \quad \wedge \quad \alpha\beta - \gamma^2 > 0 \,.$$

14.3. Extremalstellen

Def: $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^m$ besitzt

i) ein lokales Maximum bzw. lokales Minimum $x \in U$, falls

$\exists$ Umgebung $V \subset U$ von x: $\forall y \in V$: $f(x) \geq f(y)$ bzw. $f(y) \geq f(x)$

Gilt sogar $>$ bzw $<$ (statt $\geq$ bzw. $\leq$) für alle $y \in V \setminus \{x\}$ heißt das lok. Max. bzw. Min. isoliert.

ii) ein globales Maximum bzw. globales Minimum, falls

$\forall y \in U$: $f(x) \geq f(y)$ bzw. $f(y) \geq f(x)$

Ein lokales Extremum ist ein lok. Maximum oder lok. Minimum.

Ziel: Zusammenhang zwischen Ableitungen & Extrema.

Def: Für $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$, $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $n \leq m$ heißt $x \in U$ regulärer Punkt, falls der Rang von $Df(x)$ maximal ist, d.h.

$$\operatorname{Rang} Df(x) = n$$

Sonst heißt x kritischer (od. singulärer) Punkt.

Spezialfall $n=1$: $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U})$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ offen

$x \in \mathcal{U}$ kritischer Punkt $\Longleftrightarrow$ $\nabla f(x) = 0$

> **Satz:** Hat $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U})$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ offen, bei $x \in \mathcal{U}$ eine Extremalstelle, dann ist x kritischer Punkt, $\nabla f(x) = 0$.

Beweis: Annahme $\nabla f(x) \neq 0$.

Satz von Taylor für $v := \nabla f(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$: $\exists\, \xi_\lambda \in [0,1]$

$$f(x+\lambda v) = f(x) + \lambda v \cdot \nabla f(x + \xi_\lambda \lambda v)$$
$$= f(x) + \lambda |\nabla f(x)|^2 + \lambda\, v \cdot \left(\nabla f(x+\xi_\lambda \lambda v) - \nabla f(x)\right)$$

Da ∇f stetig, gibt es $\varepsilon > 0$:

$$\forall\, |\lambda| < \varepsilon : \quad \left|v \cdot \left(\nabla f(x+\xi_\lambda \lambda v) - \nabla f(x)\right)\right| < \frac{1}{2} |\nabla f(x)|^2$$

Somit für $0 < \lambda < \varepsilon$: $f(x+\lambda v) > f(x)$

$-\varepsilon < \lambda < 0$: $f(x+\lambda v) < f(x)$

Widerspruch zur Extremalität!

$\square$

Beispiele: Elliptischer Paraboloid hat bei $x=0$ ein lokales Extremum. Der hyperbolische Paraboloid zeigt, daß $\nabla f(0)=0$ notwendig, aber nicht hinreichend für Existenz einer Extremalstelle bei $x=0$ ist.

Satz: Sei $f \in \mathcal{C}^2(U)$, $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $x \in U$ kritischer Pkt.
Dann ist x i) ein isoliertes lok. Min, falls $H_f(x) > 0$
ii) – Max, – $H_f(x) < 0$
iii) kein lok. Extremum, falls $H_f(x)$ indefinit.

Bem: Im Fall iii) nennt man x Sattelpunkt.

Beweis: i) Satz von Taylor für $v \neq 0$ $\exists\, \xi \in [0,1]$

$$f(x+v) = f(x) + \frac{1}{2} v \cdot H_f(x+\xi v)\, v$$

$$= f(x) + \frac{1}{2} v \cdot H_f(x) v + \frac{1}{2} v \cdot \left(H_f(x+\xi v) - H_f(x)\right) v$$

Sei $c := \min\limits_{|v|=1} v \cdot H_f(x) v > 0$

Da Hessematrix stetig ist, gibt es $\varepsilon > 0$,

$$\forall\, |v| < \varepsilon: \quad \left| \frac{v}{|v|} \cdot \left(H_f(x+\xi v) - H_f(x)\right) \frac{v}{|v|} \right| < \frac{c}{2}$$

Somit für $|v| < \varepsilon$: $f(x+v) - f(x) \geq \frac{|v|^2}{2}\left(c - \frac{c}{2}\right) \underset{\underset{|v| \neq 0}{\uparrow}}{>} 0$ $\square$

ii) + iii): analog $\square$

<u>Beispiele</u>: 1 Quadratische Funktionen S. 56

2. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)x_2^2 + x_1^2(x_1 + 1)$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} x_2^2 + 3x_1^2 + 2x_1 \\ 2(x_1 - 1)x_2 \end{pmatrix}$$

Kritische Pkte $\nabla f(x) = 0$

i) $x_1 = x_2 = 0$ ii) $x_1 = -\frac{2}{3}$, $x_2 = 0$

$$\text{Hessematrix } H_f(x) = \begin{pmatrix} 6x_1 + 2 & 2x_2 \\ 2x_2 & 2(x_1 - 1) \end{pmatrix}$$

i) $H_f(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ somit Sattelpunkt bei $x = 0$

ii) $H_f(-\frac{2}{3}, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\frac{10}{3} \end{pmatrix} < 0$ somit lok. Maximum bei $(-\frac{2}{3}, 0)$.

3. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1,x_2) = 3x_1^2 x_2 - x_2^3$ („Affensattel")

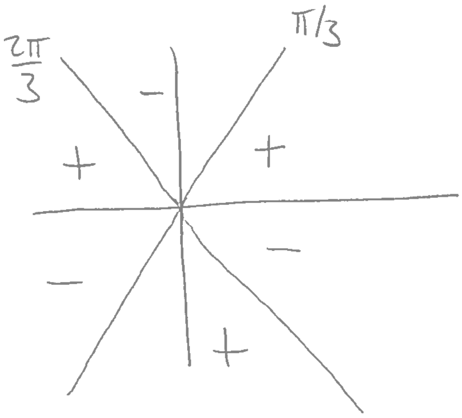
$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 6x_1x_2 \\ 3(x_1^2 - x_2^2) \end{pmatrix}$$

Kritischer Punkt: $x = 0$

Hessematrix: $H_f(x) = \begin{pmatrix} 6x_2 & 6x_1 \\ 6x_1 & -6x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow H_f(0) = 0$

Somit ist obiger Satz unbrauchbar. Betrachte

$$f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = r^3 \sin\varphi \left(3\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) = r^3 \sin(3\varphi)$$



<u>Bemerkungen:</u> 1. Semidefinitheit von $H_f(x)$ bei krit. Punkten x ist nicht hinreichend für Existenz eines lok. Extremums (siehe Affensattel)

2. Für $f: U \to \mathbb{R}$ auf abgeschlossenen Mengen $U \subset \mathbb{R}^n$ muß bei Suche nach Extrema stets f auf Rand ∂U getrennt analysiert werden.