TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. Simone Warzel
Dr. Michael Prähofer

Mathematik 3 für Physiker (Analysis 2) MA9203

Sommersemester 2015
Probeklausur
(29.06.2015)

1. **Krümmung einer Klothoide** **(8 Punkte)**

Zeigen Sie, dass die Krümmung $\kappa(t)$ der Kurve

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \int_0^t \cos(u^2/2)\,\mathrm{d}u \\ \int_0^t \sin(u^2/2)\,\mathrm{d}u \end{pmatrix}$$

an der Stelle $t > 0$ gleich ihrer Länge $L(t)$ ist.

Hinweis: Die Krümmungsformel lautet $\kappa = |(\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y})/(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}|$, wobei $\vec{r} = \binom{x}{y}$.

Lösung:

Sei $t > 0$. Wir berechnen zuerst die Krümmung mit der Formel aus dem Hinweis. **[2]**

$$\dot{x}(t) = \cos(t^2/2), \quad \ddot{x}(t) = -t\sin(t^2/2), \quad \dot{y}(t) = \sin(t^2/2), \quad \ddot{y}(t) = t\cos(t^2/2)$$

Einsetzen ergibt nun $$\kappa(t) = \left| \frac{t\cos^2(t^2/2) + t\sin^2(t^2/2)}{(\cos^2(t^2/2) + \sin^2(t^2/2))^{3/2}} \right| = t.$$ **[3]**

Die Länge ergibt $$L(t) = \int_0^t |\dot{\vec{r}}(u)|\,\mathrm{d}u = \int_0^t \sqrt{\dot{x}(u)^2 + \dot{y}(u)^2}\,\mathrm{d}u = t = \kappa(t).$$ **[3]**

2. **Stetigkeit, Differenzierbarkeit** **(7 Punkte)**

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6}, & (x,y) \neq 0, \\ 0, & (x,y) = 0. \end{cases}$$

(a) Beweisen Sie, dass f im Nullpunkt nicht stetig ist. **[3]**
Hinweis: Bestimmen Sie x_n, so dass $f(x_n, y_n)$ für $y_n = \frac{1}{n}$ konstant ist.

(b) Die partielle Ableitung $\partial_1 f(0,0)$ ist **[1]**

☐ -1 ☒ 0 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ nicht definiert.

(c) Die partielle Ableitung $\partial_2 f(0,0)$ ist **[1]**

☐ -1 ☒ 0 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ nicht definiert.

(d) Wie lautet die totale Ableitung von f im Nullpunkt? **[2]**

☐ $Df(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ $Df(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ☐ $Df(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

☒ $Df(0)$ ist nicht definiert ☐ $Df(0)$ hängt von der betrachteten Kurve ab

Lösung:

(a) Für die Nullfolge $(\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n})$ gilt $f(\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n}) = \frac{\frac{1}{n^6}}{2\frac{1}{n^6}} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$.

(b),(c) $f(x,0) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, $f(0,y) = 0$, $y \in \mathbb{R}$.

(d) f ist nicht stetig im Nullpunkt, also auch nicht (total) differenzierbar.

3. **Kurvenintegral und Integrabilität** **(9 Punkte)**
Gegeben sei das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v(x) = (x_2x_3, x_3x_1, x_1x_2)$ und die Kurve $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (1, 1+\cos t, 1+\sin t)$.

(a) Ist v konservativ? Begründen Sie.

(b) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma v(y)\cdot \mathrm{d}y$.

(c) Ist $\gamma((0,\pi))$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$? Wenn ja, welche Dimension hat sie?

☒ Ja, **[1]** $\dim(\gamma((0,\pi))) = \boxed{1}$ **[1]** ☐ Nein.

LÖSUNG:

(a) $\operatorname{rot} v = 0$ **[2]**und $\mathbb{R}^3$ ist sternförmig, nach dem Lemma von Poincaré ist v ein Gradientenfeld, d.i., konservativ. **[2]**
Volle Punktzahl auch bei Angabe eines Potentials F, z.B., $F(x) = x_1x_2x_3$.

(b) Da v konservativ ist mit einem Potential $F(x) = x_1x_2x_3$, **[2]**
so gilt **[1]**

$$\int_\gamma v(y)\cdot \mathrm{d}y = F(\gamma(\pi)) - F(\gamma(0)) = F(1,0,1) - F(1,2,1) = -2.$$

(c) $\gamma(((0,\pi)) \subset \mathbb{R}^3$ ist eine eindimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit. $\gamma|_{(0,\pi)}$ ist Parametrisierung. Sie kann auch als Lösungsmenge der beiden Gleichungen $x_1 - 1 = 0$, $(x_2-1)^2 + (x_3-1)^2 = 1$ auf der offenen Menge $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 > 1\}$ beschrieben werden.

4. **Kettenregel** **(5 Punkte)**
Seien $v, w \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Kurve. Beweisen Sie für alle $t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v(\gamma(t))\cdot w(\gamma(t)) = \sum_{j=1}^n \Big[w_j(\gamma(t))\nabla v_j(\gamma(t)) + v_j(\gamma(t))\nabla w_j(\gamma(t)) \Big] \cdot \dot\gamma(t).$$

LÖSUNG:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v(\gamma(t))\cdot w(\gamma(t)) &\overset{[1]}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{j=1}^n v_j(\gamma(t)) w_j(\gamma(t)) \\
&\overset{[2]}{=} \sum_{j=1}^n \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v_j(\gamma(t))\Big) w_j(\gamma(t)) + v_j(\gamma(t))\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} w_j(\gamma(t))\Big) \\
&\overset{[2]}{=} \sum_{j=1}^n w_j(\gamma(t))\nabla v_j(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t) + v_j(\gamma(t))\nabla w_j(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t)
\end{aligned}$$

5. **Extrema** **(10 Punkte)**

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1^3 + x_2^2 - 3x_1 - 2x_2$.

(a) Bestimmen und klassifizieren Sie die lokalen Extrema von f.

(b) Unter der Nebenbedingung $x_2 = 1$ besitzt f bei $x_1 = -1$ **[2]**

☒ ein lokales Maximum ☐ ein lokales Minimum ☐ einen Sattelpunkt bei $x_1 = -1$

LÖSUNG:

(a) Kritische Punkte: $\nabla f(x) = \binom{3x_1^2-3}{2x_2-2} = \binom{3(x_1^2-1)}{2(x_2-1)} = 0$ **[1]**

$\iff x_1 = \pm 1$, $x_2 = 1$. **[2]**

Hessematrix: $H_f(x) = \begin{pmatrix} 6x_1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ **[1]**

Bei $(1,1)$: $H_f(1,1) = \operatorname{diag}(6,2)$ ist positiv definit, also lokales Minimum **[2]**

Bei $(-1,1)$: $H_f(-1,1) = \operatorname{diag}(-6,2)$ ist indefinit, also Sattelpunkt **[2]**

(b) Mit der Nebenbedingung $x_2 = 1$ ist die Funktion $x_1 \mapsto f(x_1, 1) = x_1^3 - 3x_1 - 1$ zu betrachten, mit erster Ableitung $3x_1^2 - 3$ gleich Null bei $x_1 = \pm 1$ und zweiter Ableitung $6x_1$ kleiner 0 bei $x_1 = -1$, also lokales Maximum.

6. **Taylorpolynom** **(8 Punkte)**

Geben Sie das Taylorpolynom 5. Ordnung von $f(x,y) = \frac{\sin(y)}{\sqrt{1+x^2y^2}}$ um $(0,0)$ an.

$$T_5 f((x,y);(0,0)) = y - \tfrac{1}{6}y^3 + \tfrac{1}{120}y^5 - \tfrac{1}{2}x^2y^3$$

LÖSUNG:

$f(x,y) = (y - \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{120}y^5 \mp \cdots)(1 - \frac{1}{2}x^2y^2 \pm \cdots) = y - \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{120}y^5 - \frac{1}{2}x^2y^3 + \cdots$

[1],**[2]**,**[2]**,**[2]** für die richtigen Terme und **[1]** falls keine zusätzlichen Terme angegeben sind.

7. **Inverse Funktionen** **(6 Punkte)**

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x^3 + 2xy + y^2, x^2 + y)$. Zeigen Sie, dass f in einer Umgebung von $(1,1)$ invertierbar ist und bestimmen Sie die Ableitung der lokalen Umkehrfunktion im Punkt $f(1,1)$.

LÖSUNG:

Die Funktion ist stetig differenzierbar, **[1]**

für die Ableitung $Df(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 2y & 2x + 2y \\ 2x & 1 \end{pmatrix}$ **[1]**

gilt im Punkt $(1,1)$, dass $Df(1,1) = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. **[1]**

Diese Matrix ist wegen $\det \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 5 - 8 = -3 \neq 0$ invertierbar. **[1]**

Nach dem Satz über die Umkehrfunktion ist f in $(1,1)$ lokal invertierbar, mit **[1]**

$Df^{-1}(f(1,1)) = Df(1,1)^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$. **[1]**

8. **Tangentialraum** **(4 Punkte)**

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot x$. Dann ist der Graph $G_f := \{(x, f(x)) \,|\, x \in \mathbb{R}^3\} \subset \mathbb{R}^4$ eine 3-dimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^4$. Geben Sie möglichst explizit eine Basis von T_pG_f an, wobei $p \in G_f$.

LÖSUNG:

$\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $\Phi(x) = (x, f(x))$ ist eine Parametrisierung von G_f. **[1]**

Zu jedem $p \in G_f$ gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}^3$ mit $p = \Phi(x)$. **[1]**

Da $D\Phi(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \end{pmatrix}$ vollen Rang hat, ist T_pG_f dreidimensional mit **[2]**

$$T_pG_f \quad = \quad \mathrm{span}(\partial_1\Phi(x), \partial_2\Phi(x), \partial_3\Phi(x)) = \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2x_3 \end{pmatrix})$$