TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

Prof. Dr. Simone Warzel

Dr. Michael Prähofer

Mathematik 3 für Physiker (Analysis 2) MA9203

Sommersemester 2015

Probeklausur

(29.06.2015)

1. **Krümmung einer Klothoide** **(8 Punkte)**

Zeigen Sie, dass die Krümmung $\kappa(t)$ der Kurve

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \int_0^t \cos(u^2/2)\,\mathrm{d}u \\ \int_0^t \sin(u^2/2)\,\mathrm{d}u \end{pmatrix}$$

an der Stelle $t > 0$ gleich ihrer Länge $L(t)$ ist.

Hinweis: Die Krümmungsformel lautet $\kappa = |(\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y})/(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}|$, wobei $\vec{r} = \binom{x}{y}$.

2. **Stetigkeit, Differenzierbarkeit** **(7 Punkte)**

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6}, & (x,y) \neq 0, \\ 0, & (x,y) = 0. \end{cases}$$

(a) Beweisen Sie, dass f im Nullpunkt nicht stetig ist.
Hinweis: Bestimmen Sie x_n, so dass $f(x_n, y_n)$ für $y_n = \frac{1}{n}$ konstant ist.

(b) Die partielle Ableitung $\partial_1 f(0,0)$ ist

☐ -1 ☐ 0 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ nicht definiert.

(c) Die partielle Ableitung $\partial_2 f(0,0)$ ist

☐ -1 ☐ 0 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ nicht definiert.

(d) Wie lautet die totale Ableitung von f im Nullpunkt?

☐ $Df(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ $Df(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ☐ $Df(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

☐ $Df(0)$ ist nicht definiert ☐ $Df(0)$ hängt von der betrachteten Kurve ab

3. **Kurvenintegral und Integrabilität** **(9 Punkte)**

Gegeben sei das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v(x) = (x_2x_3, x_3x_1, x_1x_2)$ und die Kurve $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (1, 1 + \cos t, 1 + \sin t)$.

(a) Ist v konservativ? Begründen Sie.

(b) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma v(y) \cdot \mathrm{d}y$.

(c) Ist $\gamma((0,\pi))$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$? Wenn ja, welche Dimension hat sie?

☐ Ja, $\dim(\gamma((0,\pi))) = \boxed{}$ ☐ Nein.

4. **Kettenregel** **(5 Punkte)**
Seien $v, w \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Kurve. Beweisen Sie für alle $t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v(\gamma(t)) \cdot w(\gamma(t)) = \sum_{j=1}^{n} \Big[w_j(\gamma(t)) \nabla v_j(\gamma(t)) + v_j(\gamma(t)) \nabla w_j(\gamma(t)) \Big] \cdot \dot{\gamma}(t).$$

5. **Extrema** **(10 Punkte)**
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1^3 + x_2^2 - 3x_1 - 2x_2$.

(a) Bestimmen und klassifizieren Sie die lokalen Extrema von f.

(b) Unter der Nebenbedingung $x_2 = 1$ besitzt f bei $x_1 = -1$

☐ ein lokales Maximum ☐ ein lokales Minimum ☐ einen Sattelpunkt bei $x_1 = -1$

6. **Taylorpolynom** **(8 Punkte)**
Geben Sie das Taylorpolynom 5. Ordnung von $f(x, y) = \frac{\sin(y)}{\sqrt{1+x^2y^2}}$ um $(0, 0)$ an.

$T_5 f((x, y); (0, 0)) =$

7. **Inverse Funktionen** **(6 Punkte)**
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x^3 + 2xy + y^2, x^2 + y)$. Zeigen Sie, dass f in einer Umgebung von $(1, 1)$ invertierbar ist und bestimmen Sie die Ableitung der lokalen Umkehrfunktion im Punkt $f(1, 1)$.

8. **Tangentialraum** **(4 Punkte)**
Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot x$. Dann ist der Graph $G_f := \{(x, f(x)) \,|\, x \in \mathbb{R}^3\} \subset \mathbb{R}^4$ eine 3-dimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^4$. Geben Sie möglichst explizit eine Basis von $T_p G_f$ an, wobei $p \in G_f$.