TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. Simone Warzel
Dr. Michael Prähofer

Mathematik 3 für Physiker
(Analysis 2) MA9203

Sommersemester 2015
Blatt 13
(12.07.2015)

Zentralübung

Z13.1. Das Lorenz-System

Die Lorenz Gleichungen

$$\dot{x} = -\sigma x + \sigma y, \quad \dot{y} = -xz + rx - y, \quad \dot{z} = xy - bz,$$

mit $\sigma, b, r > 0$, beschreiben ein nichtlineares dynamisches System im $\mathbb{R}^3$.

(a) Man linearisiere die Lorenz-Gleichungen um den Ursprung, und klassifiziere so die Art des Fixpunktes in Abhängigkeit von r.

(b) Zeigen Sie, dass für $r \geq 1$ die Punkte $(\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1) \in \mathbb{R}^3$ weitere Fixpunkte des Lorenz-Systems sind. Man analysiere die Stabilitätseigenschaften für $r = 1 + \epsilon$ für kleine $\epsilon \geq 0$.

Z13.2. Eine Minimalfläche

Zur stetig differenzierbaren Funktion $x : (-1,1) \to \mathbb{R}^+$ betrachten wir den Rotationskörper $S := \{(t,u,v) \in \mathbb{R}^3 \mid u^2 + v^2 = x(t)^2\}$. Sein Flächeninhalt ist gegeben durch

$$F(x) = 2\pi \int_{-1}^{1} x(t)\sqrt{1 + \dot{x}(t)^2}\,dt$$

(a) Bestimmen Sie ein erstes Integral der Euler-Lagrange Gleichung für F und finden Sie Lösungen der Form $x(t) = a\cosh(b(t+c))$. Welche Einschränkung ergibt sich an a, b und c?

(b) Wie lautet die Euler-Lagrange-Gleichung für F?

(c) Zeigen Sie, dass die in (a) gefundenen Funktionen die Euler-Lagrange-Gleichung für F lösen.

Tutoraufgaben

T13.1. Der Fluss eines zweidimensionalen linearen Systems

Skizzieren Sie für das Differenzialgleichungssystem $\dot{x} = Ax$ mit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ qualitativ den Fluss des zugehörigen Vektorfeldes, für feste Werte von $\alpha, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und diskutieren Sie die Art des Fixpunktes im Ursprung, wobei

(a) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$. Man unterscheide die drei Fälle $\lambda < \mu < 0$, $\lambda = \mu < 0$, $\lambda < 0 < \mu$.

(b) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$,

(c) $A = \begin{pmatrix} \alpha & \lambda \\ -\lambda & \alpha \end{pmatrix}$ mit $\lambda > 0$.

T13.2. Zwei einfache Variationsprobleme

Bestimmen Sie die stationären Punkte von $F(x) = \int_1^e L(t, x, \dot{x})dt$ für $x \in C^2([1,e])$ mit den Randbedingungen $x(1) = a$, $x(e) = b$, $a, b > 0$, wobei

(a) $L(t, x, v) = tv^2$, (b) $L(t, x, v) = xv^2$.

Hausaufgaben

H13.1. Differenzierbarkeit

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = \begin{cases} x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq 0, \\ 0 & \text{für } (x, y) = 0. \end{cases}$$

(a) Wie lauten die partiellen Ableitungen $\partial_x f(0, 0)$ und $\partial_y f(0, 0)$?

(b) Wie lautet die Richtungsableitung $\partial_v f(0, 0)$ in Richtung $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ im Ursprung?

(c) Ist f differenzierbar im Ursprung? Begründen Sie kurz.

(d) Zeigen Sie, dass f eine stetige Funktion ist.

H13.2. Implizit definierte Funktionen

Gegeben sind die Gleichungen

$$\begin{aligned} x + y + \sin z &= 0, \\ 3 \sin x - 2 \tan y - z &= 0. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass man dieses Gleichungssystem im Ursprung lokal gleichzeitig nach y und z auflösen kann und berechnen Sie die erste Ableitung der so implizit definierten Funktion $x \mapsto g(x)$ im Punkt $x = 0$.

(b) Die Lösungsmenge dieses Gleichungssystems werde im Ursprung lokal als Kurve im $\mathbb{R}^3$ durch x parametrisiert. Geben Sie mit Hilfe von (a) den Einheitstangentialvektor an diese Kurve im Ursprung an.

H13.3. Extrema mit Nebenbedingungen

Bestimmen Sie die maximale Fläche eines rechteckigen Geheges mit den Seitenlängen $a, b \geq 0$, unter der Nebenbedingung, dass ein Zaun, der drei Seiten des Geheges begrenzt, die feste Länge $L > 0$ hat. (Die vierte Seite mit der Länge a verläuft entlang einer Mauer.) Benutzen Sie die Methode der Lagrange-Multiplikatoren.

Hausaufgabenabgabe bis Donnerstag, 16.07.2015, 10:00 im Briefkasten oder vor Beginn der Zentralübung.
Die Abgabe der Hausaufgaben ist freiwillig. Sie werden nicht korrigiert, gegebenenfalls aber als "sinnvoll bearbeitet" gewertet.