TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

Prof. Dr. Simone Warzel
Dr. Michael Prähofer

Mathematik 3 für Physiker (Analysis 2) MA9203

Sommersemester 2015
Blatt 10
(19.06.2015)

Zentralübung

Z10.1. Kronecker-Delta und Levi-Civita-Symbol

Für das Kronecker-Delta gilt $\delta_{ij} = e_i \cdot e_j$, für das Levi-Civita-Symbol $\epsilon_{ijk} = e_i \cdot (e_j \times e_k)$, jeweils für $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$, mit der Standard-ONB $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$. Bekannterweise ist $\delta_{ij} = \delta_{ji}$, $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki}$, $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}$, $\sum_{j=1}^{3} \delta_{ij}\delta_{jk} = \delta_{ik}$, $\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$. Zeigen Sie für $v, w \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$:

(a) $(\nabla \times v)_i = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\partial_j v_k$,

(b) $\nabla \cdot (v \times w) = w \cdot (\nabla \times v) - v \cdot (\nabla \times w)$.

Z10.2. Spur und Determinante

Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zeige man $\det(e^{tA}) = e^{t\,\mathrm{spur}(A)}$, falls

(a) A diagonalisierbar ist,

(b) $A = \lambda \mathbb{1} + N$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und der nilpotenten Matrix $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ ist.

(c) A beliebig ist. *Hinweis:* Jordan-Normalform.

Z10.3. Magnetischer Wirbel

Gegeben ist das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$, $v(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1}(-y, x)$.

(a) Zeigen Sie, dass v rotationsfrei, aber kein Gradientenfeld ist.

(b) Zeigen Sie explizit, dass $D := \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_0^- \times \{0\})$ sternförmig ist.

(c) Geben Sie ein Potential $f : D \to \mathbb{R}$ von $v|_D$ an.

Tutoraufgaben

T10.1. Nabla-Operator, Identitäten I

Seien $f, g \in C^2(\mathbb{R}^3)$ und $v, w \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$. Beweisen Sie die folgenden Identitäten.

(a) $\nabla \cdot (fv) = (\nabla f) \cdot v + f(\nabla \cdot v)$, (b) $\nabla \cdot (\nabla \times v) = 0$, (c) $\nabla \times (\nabla f) = 0$,

(d) $\nabla \times (v \times w) = (w \cdot \nabla)v - (v \cdot \nabla)w + (\nabla \cdot w)v - (\nabla \cdot v)w$.

T10.2. Gradientenfelder I

(a) Ist eines der beiden Vektorfelder $v, w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$v(x, y) = (y, y - x), \quad w(x, y) = (y, x - y),$$

ein Gradientenfeld? Wenn ja, wie lautet ein zugehöriges Potential?

(b) Zeigen Sie, dass das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$, $v(x) = h(|x|)x$ mit $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ stetig, ein Gradientenfeld ist, indem Sie ein Potential angeben.
Hinweis: Man betrachte eine Stammfunktion von $r \mapsto rh(r)$.

(c) Man gebe zu $x \mapsto x$ und $x \mapsto \frac{x}{|x|^3}$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, Potentiale an.

T10.3. Konstruktion eines Potentials

Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ ein offener achsenparalleler Quader, der den Ursprung enthält und $v \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ ein Gradientenfeld.

(a) Schreiben Sie die rechte Seite von

$$f(x,y,z) := \int_0^z v_3(0,0,t)\mathrm{d}t + \int_0^y v_2(0,t,z)\mathrm{d}t + \int_0^x v_1(t,y,z)\mathrm{d}t$$

als Kurvenintegral. Warum ist das so definierte $f : U \to \mathbb{R}$ ein Potential von v?

(b) Für welches α ist $v(x,y,z) = (y^2+\alpha xz, z^2+\alpha xy, x^2+\alpha yz)$ auf $\mathbb{R}^3$ ein Gradientenfeld? Man bestimme dafür ein Potential.

Hausaufgaben

H10.1. Nabla-Operator, Identitäten II

Seien $f, g \in C^2(\mathbb{R}^3)$ und $v, w \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$. Beweisen Sie die folgenden Identitäten.

(a) $\nabla \cdot (\nabla f) = \Delta f$

(b) $\nabla \times (\nabla \times v) = \nabla(\nabla \cdot v) - \Delta v \quad$ (wobei hier $\Delta v = (\Delta v_1, \Delta v_2, \Delta v_3)$)

(c) $\nabla \times (fv) = f\nabla \times v + (\nabla f) \times v$

(d) $\nabla \times (v \times w) = (w \cdot \nabla)v - (v \cdot \nabla)w + (\nabla \cdot w)v - (\nabla \cdot v)w$

(e) $\nabla(v \cdot w) = (w \cdot \nabla)v + (v \cdot \nabla)w + v \times (\nabla \times w) + w \times (\nabla \times v)$

H10.2. Fluss eines linearen Vektorfeldes

Sei $v(x) = Ax$, $x \in \mathbb{R}^3$ ein lineares Vektorfeld, $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Für die Funktion $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, den Fluss von v, gelte: $t \mapsto \Phi_t(x) \in \mathbb{R}^3$ ist für jedes feste $x \in \mathbb{R}^3$ Lösung der Differentialgleichung $\dot{y} = v(y)$ mit $y(0) = x$. Für $W = [0,1]^3$ setzen wir $S(t) := \Phi_t(W) \subset \mathbb{R}^3$.

(a) Man zeige, dass $S(t) = \left\{ \sum_{j=1}^{3} \alpha_j e^{tA} e_j \; : \; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in [0,1] \right\}$ ist.

(b) Berechnen Sie das Volumen von $S(t)$. Was passiert, wenn $\operatorname{div} v = 0$ ist?

H10.3. Gradientenfelder II

Für welche Funktionen $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$ ist das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$v(x,y,z) = (x, y, f(x,y,z)),$$

ein Gradientenfeld ? Bestimmen Sie ein zugehöriges Potential F.

Hausaufgabenabgabe: Montag, 29.06.2015, bis 12:00 im Briefkasten Keller FMI-Gebäude oder vor Beginn der Zentralübung im PH HS 1

Am Montag, den 29.06.2015, wird an Stelle der Zentralübung die Probeklausur geschrieben.