TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR. SIMONE WARZEL
DR. MICHAEL PRÄHOFER

Mathematik 3 für Physiker (Analysis 2) MA9203

Sommersemester 2015
Blatt 8
(05.06.2015)

Zentralübung

Z8.1. Laplace-Gleichung in Polarkoordinaten

Die C^2–Funktion $u : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto u(x, y)$ wird durch Einführung von Polarkoordinaten zu einer Funktion $U(r, \varphi)$. Es gelte die Laplace-Gleichung $\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0$.

(a) Wie erhält man U bei bekanntem u und umgekehrt.

(b) Wie lautet die Jacobi-Matrix der Transformation auf Polarkoordinaten $\Phi : (r, \varphi) \mapsto (x(r, \varphi), y(r, \varphi))$ und (geeignet eingeschränkt) ihrer Inversen Φ^{-1}?

(c) Berechnen Sie die Form der Laplace-Gleichung in Polarkoordinaten, d.h. die Differentialgleichung für $U(r, \varphi)$, die der Laplace-Gleichung für $u(x, y)$ entspricht.

(d) Finden Sie alle Lösungen dieser Gleichung, die nicht von φ abhängen.

Z8.2. n-Eck mit maximaler Fläche

Gesucht ist für $n \geq 3$ ein n-Eck mit maximaler Fläche, dessen – ausgehend von der positiven reellen Achse gegen den Uhrzeigersinn nummerierten – Ecken $z_j \in \mathbb{R}^2$, $j = 1, \ldots, n$, auf dem Einheitskreis liegen.

(a) Sei $\phi_j \in [0, 2\pi)$ der Winkel zwischen z_{j+1} und z_j, $j = 1, \ldots, n$, $z_{n+1} := z_1$. Man begründe warum

$$g(\phi_1, \ldots, \phi_n) \quad := \quad 2\pi - \sum_{j=1}^{n} \phi_j = 0$$

gilt und die Fläche des Polygons durch

$$f(\phi_1, \ldots, \phi_n) = \sum_{j=1}^{n} \tfrac{1}{2} \sin \phi_j$$

gegeben ist.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode der Lagrange-Multiplikatoren alle Kandidaten für Extremwerte von f unter der Nebenbedingung $g(\phi_1, \cdots, \phi_n) = 0$.

Z8.3. Extrema mit mehreren Nebenbedingungen

Seien $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m < n \in \mathbb{N}$, h, f in C^1. $M = \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) = 0\}$. Die Einschränkung $h|_M$ habe ein lokales Extremum an der Stelle $a \in M$ und $Df(a)$ habe vollen Rang. Dann gilt

$$\operatorname{grad} h(a) \in \operatorname{span}(\operatorname{grad} f_1(a), \ldots, f_m(a)),$$

bzw., es existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}^m$, so dass, mit $F_\lambda = h - \langle \lambda, f \rangle : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\operatorname{grad} F_\lambda(a) = 0.$$

Tutoraufgaben

T8.1. Extrema mit Nebenbedingung

(a) Man beschreibe die durch die Gleichung $e^{xy} = x + y$ gegebene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$. (Verhalten bei den Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen, im Unendlichen.)

(b) Bestimmen Sie die Extremwerte der Funktion $F(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ unter der Nebenbedingung $e^{xy} = x + y$.

T8.2. Extrema mit mehreren Nebenbedingungen

Benutzen Sie die Methode der Lagrange-Multiplikatoren. Wie lauten die Minima und Maxima der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = 5x + y - 3z$, auf dem Schnitt der Ebene $x + y + z = 0$ mit der Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 1$?

T8.3. Maxima und Minima auf einer Kreisscheibe

Bestimmen Sie die absoluten Extrema der Funktion $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - x$ auf der Menge $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Hausaufgaben

H8.1. Extrema mit Nebenbedingungen

(a) Bestimmen Sie den minimalen Abstand des Punktes $(1, 0, 0)$ von der durch die Gleichung $x + y - z = 0$ gegebenen Ebene.

(b) Wie lauten die Minima und Maxima der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy$ auf der Einheitskreisscheibe $x^2 + y^2 \leq 1$?

H8.2. Extrema mit Nebenbedingungen

(a) Bestimmen Sie die Kandidaten für Extremalstellen von $f(x, y) = \ln(x^4 y^5)$ für $x, y > 0$ unter der Nebenbedingung $x^2 + 4y^2 = 1$. [Ergebnis: $(x_0, y_0) = (\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{6})$]

(b) Bei (x_0, y_0) besitzt f unter obiger Nebenbedingung

☐ ein lokales Minimum, ☐ einen Sattelpunkt, ☐ ein lokales Maximum.

H8.3. Extrema mit Nebenbedingungen

Sei $g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion mit $g'(t) > 0$ für $t \geq 0$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = g(|x|)$. Finden Sie die globalen Maxima und Minima von f unter der Nebenbedingung $5x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 = 5$.

Hausaufgabenabgabe: Montag, 15.06.2015, bis 12:00 im Briefkasten Keller FMI-Gebäude oder vor Beginn der Zentralübung im PH HS 1