Zentralübung

Z7.1. Lineare Ausgleichsrechnung

Seien $(v_i, a_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, \ldots, 100$, Messwerte der Geschwindigkeit und Beschleunigung eines Autos jeweils zu den Zeiten t_i, $t_i < t_{i+1}$. Das Auto wurde auf ebener Strecke zur Zeit $t_0 < t_1$ ausgekuppelt und rollte aus. Gesucht sind die Koeffizienten der Funktion $a(v) = \mu + \beta v^2$, aus denen sich Rollreibung und Luftwiderstandsbeiwert des Autos bestimmen lassen, so dass die quadratische Abweichung $\sum\limits_i |a_i - a(v_i)|^2$ minimal ist. Geben Sie explizite Formeln für μ, β an.

Z7.2. Der Satz über implizite Funktionen, linearer Fall

Sei $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ linear, $b \in \mathbb{R}^m$. Unter welcher Bedingung ist das Gleichungssystem $f(x, y) = b$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ nach y auflösbar? Man gebe explizit die implizit definierte Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ an, für die $f(x, g(x)) = b$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Z7.3. Störungsrechnung

Sei $p(x)$ ein reelles Polynom mit der einfachen Nullstelle $x_0 \in \mathbb{R}$.

a) Man zeige: Ist α klein genug, so besitzt das Polynom $p(x) - \alpha$ eine Nullstelle in der Nähe von x_0.

b) Sei $x_0(\alpha)$ für kleine α die in (a) erwähnte Nullstelle. Man entwickle $x_0(\alpha)$ bis zur zweiten Ordnung in α.

Tutoraufgaben

T7.1. Das Maximum liegt auf dem Rand

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, und $f : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ stetig und stetig differenzierbar auf U mit $Df(x)$ invertierbar für alle $x \in U$. Zeigen Sie, dass $g : \overline{U} \to \mathbb{R}$, $g(X) = |f(x)|$ sein Maximum auf dem Rand annimmt.

T7.2. Implizit definierte Funktionen

Seine $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, mit $f(X_0) = g(X_0) = 0$, wobei $X_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Unter welcher Bedingung kann die Gleichung $f(x, y, z) = 0$ im Punkt X_0 lokal nach z aufgelöst werden?
Wie lautet dann der Gradient der sich ergebenden Funktion $(x, y) \mapsto \tilde{z}(x, y)$ in einer Umgebung von (x_0, y_0), bzw., im Punkt (x_0, y_0) selbst?

(b) Unter welcher Bedingung können die beiden Gleichungen $f(x, y, z) = 0$, $g(x, y, z) = 0$, im Punkt X_0 lokal nach y und z aufgelöst werden?
Wie lautet dann die Ableitung der sich ergebenden Funktion $x \mapsto \binom{\tilde{y}(x)}{\tilde{z}(x)}$ bei x_0?

T7.3. Zustandsgleichungen

Ein einfaches thermodynamisches System wird durch die Zustandsgleichung $F(p, V, T) = 0$ beschrieben.

(a) Unter welchen Bedingungen kann die Zustandsgleichung lokal nach p, V, bzw., T aufgelöst werden?

(b) Sei $\tilde{p}(V, T)$ eine lokale Auflösung von $F(p, V, T) = 0$ nach p und F eine C^2–Funktion. Man beweise $\partial_V^2 \tilde{p}(V, T) = -\frac{F_p F_{VV} F_p - 2F_V F_{pV} F_p + F_V F_{pp} F_V}{(F_p)^3}|_{(\tilde{p}(V,T),V,T)}$, mit der Abkürzung $F_p := \partial_p F$, $F_V := \partial_V F$, $F_{Vp} := \partial_p \partial_V F$, ...

(c) Man interpretiere und beweise $\frac{\partial p}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} = -1$ unter geeigneten Bedingungen.

Hausaufgaben

H7.1. Van–der–Waals–Gleichung

Ein reales Gas wird durch die Zustandsgleichung $F(p, V, T) = 0$,
$F(p, V, T) = \left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) - RT$ mit Konstanten $a, b \geq 0$, $R > 0$ beschrieben.

(a) Man überprüfe die Aussage in Aufgabe T7.3(c) explizit für $a = b = 0$ (Ideales Gas).

(b) Sei nun $a, b > 0$. Zeigen Sie, dass sich $F|_{\mathbb{R}_+ \times (b,\infty) \times \mathbb{R}_+}$ global nach p auflösen läßt. Skizzieren Sie $V \mapsto p(V, T)$ für $a = 27$, $b = 1$, $R = 1$ und $T = 7, 8, 9$ für $V \in (b, 8]$.

(c) Bestimmen Sie den Punkt $(p_c, V_c, T_c) \in F^{-1}(\{0\})$, in dem sowohl $\partial_V p(V_c, T_c) = 0$, als auch $\partial_V^2 p(V_c, T_c) = 0$ ist (kritischer Punkt).

H7.2. Implizit definierte Funktionen

Seien $f_1(t, x, y) = \log x + y^2 t - 4$, $f_2(t, x, y) = x^2 + yt^2 + t^2$ für $t, x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0$, und $P = (1, 1, -2)$. Es gilt $f_1(P) = f_2(P) = 0$.

(a) Die Gleichung $f_1(t, x, y) = 0$ kann offenbar in einer Umgebung des Punktes P lokal nach y aufgelöst werden. Man erhält die Funktion $(t, x) \mapsto \tilde{y}(t, x)$. Berechnen Sie $\operatorname{grad} \tilde{y}(1, 1)$.

(b) Der Punkt P ist eine Lösung des Gleichungssystems $f_1(t, x, y) = 0$, $f_2(t, x, y) = 0$, bzw., der Gleichung

$$f(t, x, y) = 0$$

mit $f = \binom{f_1}{f_2} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Diese soll in einer Umgebung von P lokal nach x und y aufgelöst werden. Die Invertierbarkeit welcher Matrix muss dazu überprüft werden?

(c) Die lokale Aufösung von $f(t, x, y) = 0 \in \mathbb{R}^2$ nach x und y im Punkt P ergibt die beiden Funktionen $\bar{x}(t)$, $\bar{y}(t)$, definiert in einer Umgebung von $t = 1$. Berechnen Sie $\dot{\bar{x}}(1)$ und $\dot{\bar{y}}(1)$.

H7.3. Störungsrechnung

$V_\alpha(x) = (x^2 - 1)^2 - \alpha x$, $x \in \mathbb{R}$, ist ein Doppelmuldenpotential in einem konstanten elektrischen Feld der Stärke $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen und klassifizieren Sie die lokalen Extrema für $\alpha = 0$.

(b) Wie verändern sich die Positionen der lokalen Extrema von V_α in Abhängigkeit von α, entwickelt bis zur zweiten Ordnung um $\alpha = 0$?

(c) Geben Sie die Werte von V_α und V_α'' in den Extremalstellen bis zur zweiten Ordnung in α an.

Hausaufgabenabgabe: Montag, 08.06.2015, bis 12:00 im Briefkasten Keller FMI-Gebäude oder vor Beginn der Zentralübung im PH HS 1