TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR. SIMONE WARZEL
DR. MICHAEL PRÄHOFER

Mathematik 3 für Physiker (Analysis 2) MA9203

Sommersemester 2015
Blatt 4
(08.05.2015)

Zentralübung

Z4.1. Komponentenweise Differenzierbarkeit

Gegeben sei $f : U \to \mathbb{R}^n$ mit $U \subset \mathbb{R}^m$ offen.

Zeigen Sie, dass f genau dann differenzierbar bei $x \in U$ ist wenn alle Komponentenabbildungen $f_j : U \to \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$, bei $x \in U$ differenzierbar sind.

Z4.2. Linearität der Ableitung

Seien $f, g : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, differenzierbar bei $x \in U$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) $D(\lambda f)(x) = \lambda Df(x)$,

(b) $D(f + g)(x) = Df(x) + Dg(x)$.

(c) Sei nun $U = \mathbb{R}^n$, $f(x) = Ax$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Wie lautet $Df(x)$?

(d) Sei nun $m = 1$. Geben Sie eine Parametrisierung der Tangentialebene an den Graphen von g im Punkt $(x, g(x)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ an. Geben Sie ein lineares Gleichungssystem an, das genau diese Tangentialebene als Lösungsmenge hat.

Tutoraufgaben

T4.1. Differenzierbarkeit

Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq 0, \\ 0, & (x,y) = 0. \end{cases}$$

Man zeige:

(a) f ist partiell differenzierbar,

(b) f, $\partial_x f$ und $\partial_y f$ sind nicht stetig.

T4.2. Ableitung von Produkten

Seien $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ und $h : U \to \mathbb{R}$ bei $x \in U$ differenzierbar. Zeigen Sie wie in der Vorlesung für das Skalarprodukt, dass

$$D(hf)(x) = f(x)Dh(x) + h(x)Df(x) \in \mathbb{R}^{n\times m}.$$

T4.3. Ableitungen von Polynomen

Die Dreifachfolge $(a_{klm})_{k,l,m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ habe nur endlich viele von Null verschiedene Glieder. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \sum_{k,l,m=0}^{\infty} a_{klm} x_1^k x_2^l x_3^m.$$

(a) Berechnen Sie $\operatorname{grad} f(x)$, und zeigen Sie, dass $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$, $i, j = 1, 2, 3$.

(b) Sei nun $a_{klm} = 0$ für $k + l + m > 2$. Zeigen Sie, dass f in der Form

$$f(x) = \tfrac{1}{2} x^T A x + b^T x + c$$

geschrieben werden kann, wobei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ symmetrisch ist, $b \in \mathbb{R}^3$ und $c \in \mathbb{R}$.

(c) Drücken Sie A, b, c in Teilaufgabe (b) durch die partiellen Ableitungen von f im Nullpunkt aus.

Hausaufgaben

H4.1. Partielle Ableitungen

(a) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine stetig partiell differenzierbare Funktion und $a \in \mathbb{R}^3$. Wie ist $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \in \mathbb{R}$ und $\frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \in \mathbb{R}$ definiert? Wie sind die Funktionen $\frac{\partial f}{\partial x_3}$, $\mathrm{grad} f$ und $\partial_v f$, $v \in \mathbb{R}^3$, $|v| = 1$, definiert?

(b) Berechnen Sie die ersten und zweiten partiellen Ableitungen, den Gradienten und die Richtungsableitung in Richtung $\binom{1}{-1}$ der Funktionen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$,
(i) $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2$, (ii) $g(x, y) = xy^2 + ye^{-xy}$, (iii) $h(a, b) = a \sin b$

H4.2. Wärmeleitungsgleichung

Sei $L := \{u : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R} : u(x,t)$ zweimal stetig partiell differenzierbar und $\partial_t u = \frac{D}{2}\partial_x^2 u\}$ die Menge aller Lösungen der Wärmeleitungsgleichung mit Diffusionskonstante $D > 0$. Eine solche Lösung beschreibt zum Beispiel die zeitabhängige Temperaturverteilung in einem eindimensionalen Wärmeleiter.

(a) Zeigen Sie, dass L ein Vektorraum ist.

(b) Sei $u_{x_0}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D\, t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2Dt}}$. Zeigen Sie, dass $u_{x_0} \in L$ ist und skizzieren Sie mit $D = 1$ die Graphen von $x \mapsto u_{x_0}(x, t)$ für verschiedene Werte von t.

Hausaufgabenabgabe: Montag, 18.05.2015, bis 12:00 im Briefkasten Keller FMI-Gebäude
oder vor Beginn der Zentralübung im PH HS 1