



Zentralübung

Z1.1. Zykloide als Graph, Bogenlänge

Die Kurve $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $x(t) = \begin{pmatrix} t + \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}$, heißt Zykloide. Skizzieren Sie ihre Spur, berechnen Sie ihre Bogenlänge im Intervall $[-\pi, \pi]$ und geben Sie jeweils eine Parametrisierung durch die x_2 - und die x_1 -Koordinate auf geeigneten Teilkurven an.

Z1.2. Begleitendes Dreibein

Sei $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine reguläre zweimal stetig differenzierbare Kurve mit $\ddot{x}(t) \neq 0$ für $t \in [0, T]$. Dann gilt für das begleitende Dreibein und die Krümmung:

$$\begin{aligned} \tau(t) &= \frac{\dot{x}(t)}{|\dot{x}(t)|} && \text{(Tangentialvektor)} \\ n(t) &= b(t) \times \tau(t) && \text{(Hauptnormalenvektor)} \\ b(t) &= \frac{\dot{x}(t) \times \ddot{x}(t)}{|\dot{x}(t) \times \ddot{x}(t)|} && \text{(Binormalenvektor)} \\ \kappa(t) &= \frac{|\dot{x}(t) \times \ddot{x}(t)|}{|\dot{x}(t)|^3} && \text{(Krümmung)} \end{aligned}$$

Tutoraufgaben

T1.1. Die durch Bogenlänge parametrisierte Zykloide

Parametrisieren Sie die Zykloide $x : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $x(t) = \begin{pmatrix} t + \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}$ durch ihre Bogenlänge.

$$\text{Ergebnis: } \tilde{x}(s) = \begin{pmatrix} 2 \arcsin \frac{s}{4} + \frac{s}{2} (1 - \frac{s^2}{16})^{1/2} \\ \frac{s^2}{8} \end{pmatrix}, s \in [-4, 4]$$

T1.2. Schmiegekreise der Parabel

Berechnen Sie das begleitende Dreibein und die Krümmungskreismittelpunkte der Parabelkurve $x(t) = (t, t^2, 0)$, $t \in \mathbb{R}$.

T1.3. Eine wichtige Parametrisierung für Ellipsen

Sei $p > 0$ und $\varepsilon \in (0, 1)$. Mit Hilfe der Funktion $r(\varphi) = \frac{\varepsilon p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$ definieren wir die Kurve $\tilde{x}(\varphi) = r(\varphi) \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$, $\varphi \in \mathbb{R}$.

- Skizzieren Sie $\text{spur}(\tilde{x})$ (z.B. für $p = 2$, $\varepsilon = \frac{1}{2}$) in dem sie $\tilde{x}(\varphi)$ für $\varphi \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ berechnen.
- Zeigen Sie, dass für alle $(x, y) \in \text{spur}(\tilde{x})$ die Beziehung $\varepsilon(p - x) = \sqrt{x^2 + y^2}$ gilt und interpretieren diese geometrisch.
- Zeigen Sie, dass $\text{spur}(\tilde{x})$ eine Ellipse mit waagrechter großer Halbachse $a = \frac{\varepsilon p}{1 - \varepsilon^2}$, senkrechter kleiner Halbachse $b = \frac{\varepsilon p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$ und Mittelpunkt $(x_0, y_0) = (-\frac{\varepsilon^2 p}{1 - \varepsilon^2}, 0)$ ist.

Hausaufgaben

H1.1. Die durch Bogenlänge parametrisierte Neilsche Parabel

Skizzieren Sie die Neilsche Parabel $x : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2$, $x(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$ und geben Sie explizit die Parametrisierung durch ihre Bogenlänge an.

H1.2. Krümmung einer Ellipse

Sei $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $x(t) = (a \cos t, b \sin t, 0)$ mit $a > b > 0$. Berechnen Sie das begleitende Dreibein und die Krümmung an der Stelle $x(t)$. Bestimmen Sie die Schmiegekreise mit maximalem und minimalem Radius für $a = 2$, $b = 1$.

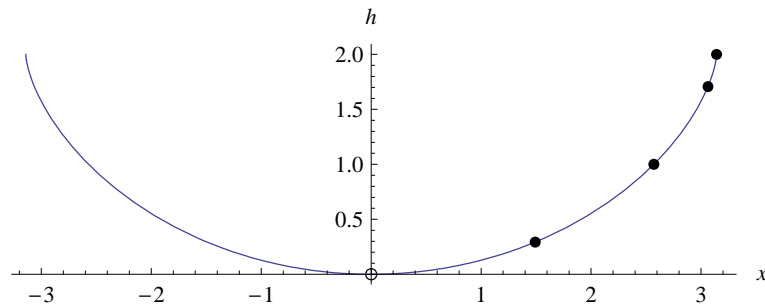
H1.3. Die Zykloide ist eine Tautochrone

Ein Massenpunkt bewegt sich reibungsfrei entlang der Zykloide $x : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$x(\varphi) = \begin{pmatrix} \varphi + \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Die Erdbeschleunigung ist $\begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$, $g \approx \pi^2$. Berechnen Sie die Zeit, die der Massenpunkt zum tiefsten Punkt braucht, wenn er an einem Punkt der Zykloide der Höhe $h_0 \in (0, 2]$ losgelassen wird.

HINWEIS: Bestimmen Sie die Bogenlänge $s(0)$ des Startpunktes entlang der Zykloide. Die Tangentialgeschwindigkeit \dot{s} ergibt sich aus der freigesetzten potentiellen Energie. Finden Sie nun anhand der erhaltenen Differentialgleichung ein T , so dass $s(T) = 0$ ist.



Hausaufgabenabgabe: Montag, 26.04.2015, bis 12:00 im Briefkasten Keller FMI-Gebäude oder vor Beginn der Zentralübung im PH HS 1