Mathematik 3 für Physik (Analysis 2) Zentralübung 12

Notiztitel 08.07.2013

Variationsrechnung, Euler-Lagrange

Funktional $\mathcal{F}(\varphi) \in \mathbb{R}$, φ Funktion!

Ist $\mathcal{F}$ differenzierbar, so sind (lokale) Extremwerte von $\mathcal{F}$ stationäre Punkte von $\mathcal{F}$, d.h. $\mathcal{F}'(\varphi_0)(h) = 0$ f.a. Funktionen h

- Ist $\mathcal{F}(\varphi) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t))\, dt$ mit einer Lagrangefunktion

  $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $L(t,x,v)$, so wird

  $\mathcal{F}'(\varphi) = 0$ zu $\frac{d}{dt} \partial_v L = \partial_x L$

  genauer $\boxed{\frac{d}{dt}(\partial_v L)(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t)) = (\partial_x L)(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t))}$ f.a. $t \in [t_0, t_1]$

  (Euler-Lagrange-Gleichung, DGL 2. Ordnung für φ)

- Zur Lösung der E-L-Gl.
  - Ist $\partial_x L = 0$, so ist $E_1(t,v) = \partial_v L(t,x,v)$ eine Konstante der Bewegung (Erstes Integral)
  - Ist $\partial_t L = 0$, so ist $E_2(x,v) = v \partial_v L(t,x,v) - L(t,x,v)$ erstes Integral $\longrightarrow$ Reduktion auf Dgl. 1. Ordnung

Kürzeste Verbindung verallg: Geodäten

Sei $\phi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ die Parametrisierung einer Fläche $M = \phi(U)$

Die Weglänge von $\phi \circ \gamma$ mit $\gamma \in C^2([0,1], U)$ ist

$$F(\gamma) = \int_0^1 \| \frac{d}{dt} \phi \circ \gamma (t) \| \, dt$$

$$\| \frac{d}{dt} \phi \circ \gamma (t) \|^2 = \| J_\phi(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) \|^2 = \left(J_\phi(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t)\right)^T J_\phi(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t)$$

$$= \dot{\gamma}(t)^T \underbrace{J_\phi(\gamma(t))^T J_\phi(\gamma(t))}_{2\times 2} \dot{\gamma}(t) = \langle \dot{\gamma}(t), g(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) \rangle$$

mit $g(x) := J_\phi^T(x) J_\phi(x)$ heißt metrischer Tensor.

Somit $F(\gamma) = \int_0^1 \langle \dot{\gamma}(t), g(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) \rangle^{1/2} dt$

$$= \int_0^1 L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \, dt$$

mit $L(x,v) = \langle v, g(x) v \rangle^{1/2}$ $\quad x, v \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial}{\partial x} L = \frac{1}{\langle v, g(x) v \rangle^{1/2}} \frac{1}{2} \langle v, \partial_x g(x) v \rangle$$

$$\frac{\partial}{\partial v} L = \frac{1}{\langle v, g(x) v \rangle^{1/2}} v^T g(x)$$

Geodäten auf der Einheitssphäre

Parametrisierung $\phi(\vartheta,\varphi)=\begin{pmatrix}\sin\vartheta\cos\varphi\\ \sin\vartheta\sin\varphi\\ \cos\vartheta\end{pmatrix}$ $\quad \phi:\mathbb{R}^2\to S^2$

$$J\phi(\vartheta,\varphi)=\begin{pmatrix}\cos\vartheta\cos\varphi & -\sin\vartheta\sin\varphi\\ \cos\vartheta\sin\varphi & \sin\vartheta\cos\varphi\\ -\sin\vartheta & 0\end{pmatrix}$$

$$g(\vartheta,\varphi)=J_\phi^T J_\phi=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \sin^2\vartheta\end{pmatrix}$$

$$\gamma(t)=\phi(\vartheta(t),\varphi(t))\in S^2 \quad t\in[0,1]$$

$$\mathcal{L}(\gamma)=\int_0^1\|\dot\gamma(t)\|\,dt=\int_0^1\left\langle\begin{pmatrix}\dot\vartheta\\ \dot\varphi\end{pmatrix}, g(\vartheta,\varphi)\begin{pmatrix}\dot\vartheta\\ \dot\varphi\end{pmatrix}\right\rangle^{1/2}dt$$

$$=\int_0^1\sqrt{\dot\vartheta^2+\sin^2\vartheta\,\dot\varphi^2}\,dt$$

Parametrisierung nach ϑ : $\gamma(\vartheta)=\phi(\vartheta,\varphi(\vartheta))$

Minimiere $\mathcal{L}(\gamma)=\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1}\underbrace{\sqrt{1+\sin^2\vartheta\,\varphi'(\vartheta)^2}}_{L(\vartheta,\varphi,\varphi')}\,d\vartheta$

$$L(\vartheta,\varphi,\omega)=\sqrt{1+\sin^2\vartheta\,\omega^2}$$ E-L: $\frac{d}{d\vartheta}\partial_\omega L=\partial_\varphi L$

$$\frac{d}{d\vartheta}\partial_\omega L(\vartheta,\varphi(\vartheta),\varphi'(\vartheta))=\partial_\varphi L(\vartheta,\varphi(\vartheta),\varphi'(\vartheta))$$

hier $1=\frac{d}{d\vartheta}\frac{\sin^2\vartheta\,\varphi'(\vartheta)}{\sqrt{1+\sin^2\vartheta\,\varphi'(\vartheta)^2}}$

bzw.: $$\frac{\sin^2\vartheta\,\varphi'(\vartheta)}{\sqrt{1+\sin^2\vartheta\,\varphi'(\vartheta)^2}} = C \in \mathbb{R}$$

wegen $|\sin\vartheta| \leq 1$ und $\left|\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right| \leq 1$ gilt $|C| \leq 1$

Setze $C = \sin\alpha$

Aufgelöst $\varphi'(\vartheta) = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\vartheta\sqrt{\sin^2\vartheta - \sin^2\alpha}}$

$\beta = \varphi(\vartheta_0)$

$\Longleftrightarrow \cos(\varphi+\beta) = \dfrac{\tan\alpha}{\tan\vartheta}$

Stammfkt $\varphi(\vartheta) = \arctan \cdots + \varphi(\vartheta_0)$

$x = \sin\vartheta\cos\varphi$

$\Longleftrightarrow \sin\vartheta(\cos\varphi\cos\beta - \sin\varphi\sin\beta) = \cos\vartheta\tan\alpha$

$y = \sin\vartheta\sin\varphi$

$z = \cos\vartheta$

$$x\cos\beta - y\sin\beta = z\tan\alpha,$$

d.i. eine Ebene, die senkrecht steht auf $\begin{pmatrix}\cos\beta \\ -\sin\beta \\ -\tan\alpha\end{pmatrix}$.

Geschnitten mit S^2 ergibt das einen Großkreis

$\Rightarrow$ Die Geodäten auf der S^2 liegen auf Großkreisen.

Probeklausur

1. (a) $A \subseteq X$ abgeschlossen $\Longleftrightarrow \left((x_n) \subseteq A \text{ konvergent mit } \lim_{n\to\infty} x_n = x \in X \Rightarrow x \in A \right)$

(b) $f: X \to Y$ stetig, $B \subseteq Y$ abgeschlossen $\Rightarrow A = f^{-1}(B)$ abgeschlossen

Sei $(x_n) \subseteq A$ kgt gegen $x \in X \Rightarrow f(x_n) \to f(x) \in B$, da B abg $\Rightarrow x \in A = f^{-1}(B)$ $\square$

2. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Richtungsableitung, $v \in \mathbb{R}^2$: $\partial_v f(x,y) = \frac{d}{dt} f(x+tv_1, y+tv_2)\Big|_{t=0}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+hv_1, y+hv_2) - f(x,y)}{h}$$

zu (b) Falls f diffbar ist in (x,y): $\partial_v f(x,y) = J_f(x,y)\, v = \nabla f(x,y) \cdot v$.

zu (d) f stetig im Ursprung $\Leftrightarrow \left[(x_n, y_n) \to 0 \Rightarrow f(x_n, y_n) \to f(0,0) \right]$

$$\not\Leftarrow \quad \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to f(0,0)$$

zu 3. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\quad h(\phi) = f(\phi\cos\varphi, \phi\sin\varphi)$, $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Berechne $h'\left(\frac{\phi}{2}\right)$, $h''\left(\frac{\phi}{2}\right)$

Mit $\gamma(\phi) = \begin{pmatrix} \phi\cos\varphi \\ \phi\sin\varphi \end{pmatrix}$ ist $h(\phi) = f \circ \gamma(\phi)$

z.B. $h'(\phi) = J_f(\gamma(\phi))\, \gamma'(\phi)$.

zu 4. $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit $F(\gamma(t)) = \ddot{\gamma}(t)$

Kraftfeld, Kurve

$\gamma(t_0) = (0,0,0) \qquad \gamma(t_1) = (1,1,1)$

$\dot{\gamma}(t_0) = 0 \qquad \|\dot{\gamma}(t_1)\| = 2$

$$\int_\gamma F(r) \cdot dr = \int_{t_0}^{t_1} F(\gamma(t))\, \dot{\gamma}(t)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \ddot{\gamma}(t) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle\, dt = \frac{1}{2}\left(\|\dot{\gamma}(t_1)\|^2 - \|\dot{\gamma}(t_0)\|^2 \right) = 2.$$