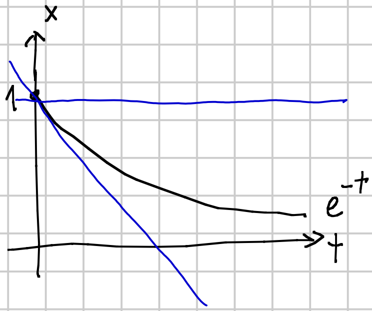
Mathematik 3 für Physik (Analysis 2) Zentralübung 11

Notiztitel 01.07.2013

Iterationsverfahren zur Lsg von DGln

für $\dot{x} = -x$, $x(0) = 1$ Lsg $x(t) = e^{-t}$

$F(x) = -x$, $x_0 = 1$



1. Picard-Iteration

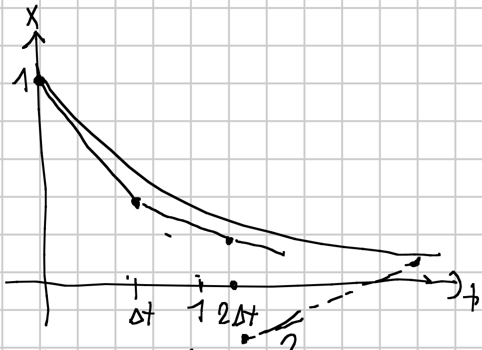
$$\varphi_0(t) = x_0, \quad \varphi_{k+1}(t) = x_0 + \int_0^t F(\varphi_k(s))\,ds$$

Hier $\varphi_0(t) = 1$, $\varphi_1(t) = 1 + \int_0^t (-1)\,ds = 1 - t$

$$\varphi_2(t) = 1 - \int_0^t (1-s)\,ds = 1 - t + \frac{t^2}{2}, \dots$$

$$\varphi_k(t) = 1 - t + \frac{t^2}{2} - \dots \pm \frac{t^k}{k!} \xrightarrow{k\to\infty} \varphi_\infty(t) = e^{-t}$$

Bsp: $\dot{x} = 1 + x^2$



2. Eulerverfahren Schrittweite $\Delta t > 0$.

$$\varphi_0 = x_0, \quad \varphi_{k+1} = \varphi_k + \Delta t\, F(\varphi_k)$$

Also $\varphi_0 = 1$, $\varphi_1 = 1 - \Delta t$, $\varphi_2 = (1-\Delta t) - \Delta t(1-\Delta t) = (1-\Delta t)^2, \dots$

$$\varphi_k(t) = (1-\Delta t)^k$$

Lösung zur Zeit $t > 0$. $\Delta t = \frac{t}{k}$:

$$\varphi(t) \overset{!?}{\approx} \varphi_k = \left(1 - \frac{t}{k}\right)^k \xrightarrow[k\to\infty]{} e^{-t} \quad (\Delta t \to 0)$$

Aber • Für $\Delta t > 1$ ist φ_k nicht monoton

• Für $\Delta t > 2$ divergiert φ_k !

3. Implizites Eulerverfahren $\quad \dot{x} = F(x)$, $x(0) = x_0$

$$\varphi_0 = x_0 \qquad \varphi_{k+1} = \varphi_k + \Delta t\, F(\varphi_{k+1})$$

Mit $\dot{x} = -x$, $x(0) = 1$:

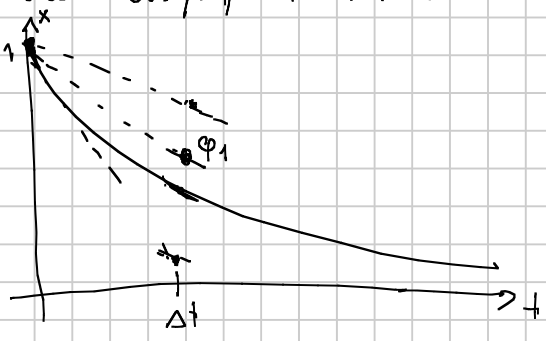
$$\varphi_0 = 1 \qquad \varphi_1 = 1 - \Delta t\, \varphi_1 \,, \quad \varphi_1 = \frac{1}{1+\Delta t}$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 - \Delta t\, \varphi_2 \,, \quad \varphi_2 = \frac{\varphi_1}{1+\Delta t} \,, \ldots$$

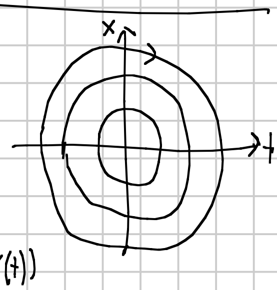
$$\varphi_k = \frac{1}{(1+\Delta t)^k}$$

Für $t = k\Delta t$: $\varphi(t) \overset{?}{\approx} \varphi_k = \frac{1}{\left(1+\frac{t}{k}\right)^k} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{e^t} = e^{-t}$

Hier : Für alle $\Delta t > 0$ ist φ_k monoton und konvergiert gegen den asymptotischen Wert von $\varphi(t) = e^{-t}$.



Bsp. zu exakten DGLn.



Erstes Integral $\quad E(t,x) = t^2 + x^2$

$f = \partial_t E \quad f(t,x) = 2t$

$g = \partial_x E \quad g(t,x) = 2x$

Satz über impl. Fkt. : $\tilde{x}(t)$

$$\dot{\tilde{x}}(t) = -\frac{\partial_t E(t,\tilde{x}(t))}{\partial_x E(t,\tilde{x}(t))}$$

$\dot{x} = -\frac{f(t,x)}{g(t,x)}$ ist exakt$^{(*)}$, E ist erstes Integral

Die Lösungen von $\dot{x} = -\frac{2t}{2x}$ sind $x(t) = \pm\sqrt{\text{const} - t^2}$, $\text{const} > 0$.

(*) exakt bedeutet hier $\partial_x f = \partial_t g$.

Umgekehrt: $\dot{x} = -\frac{\overbrace{\frac{1}{t} - x}^{f}}{\underbrace{x-t}_{g}}$ $\quad f(t,x) = \frac{1}{t} - x \quad \partial_x f = -1$

$g(t,x) = x - t \quad \partial_t g = -1$

$$\left.\begin{array}{ll} \partial_t E = f = \frac{1}{t} - x & E(t,x) = \ln|t| - tx + c_x \\ \partial_x E = g = x - t & E(t,x) = \frac{x^2}{2} - tx + \tilde{c}_t \end{array}\right\} E(t,x) = \ln|t| - tx + \frac{x^2}{2}$$

Homogene (lineare) DGLn mit konstanten Koeffizienten

$$\dot{x} = Ax \qquad x(t_0) = x_0 \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Eindeutige (globale) Lösung: $x(t) = e^{(t-t_0)A} x_0$

Inhomogene DGL mit konstanten Koeffizienten

$$\dot{x} = Ax + b(t), \quad x(0) = x_0, \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, b: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \text{ stg}$$

Eindeutige Lösung des AWP:

$$x(t) = e^{tA} x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} b(s)\,ds$$

Bew: $x(t) = e^{tA}\left(x_0 + \int_0^t e^{-sA} b(s)\,ds\right)$

$$\frac{d}{dt} x(t) = Ae^{tA}\left(x_0 + \int_0^t e^{-sA} b(s)\,ds\right) + e^{tA} e^{-tA} b(t) = Ax(t) + b(t)$$

$$x(0) = x_0 + 0 = x_0$$

Herleitung: e^{tA} bekannt. Lösungsansatz: $x(t) = e^{tA} c(t)$

(Variation der Konstante)

Einsetzen: $0 = \dot{x}(t) - Ax(t) - b(t) = \underbrace{Ae^{tA}c(t)} + e^{tA}\dot{c}(t) - \underbrace{Ae^{tA}c(t)} - b(t)$

$$= e^{tA}\dot{c}(t) - b(t) \text{ , d.h.}$$

$$\dot{c}(t) = e^{-tA}b(t), \quad c(0) = x_0 \Rightarrow c(t) = x_0 + \int_0^t e^{-sA}b(s)\,ds .$$

Wie bestimmt man das Matrixexponential?

- $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonal, $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow e^{tD} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix}$

- $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \Rightarrow e^{tN} = \mathbb{1} + tN + \frac{t^2}{2}N^2 + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}N^{n-1}$, denn

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}, \dots, N^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & \ddots & & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}, N^n = 0$$

$N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nilpotent $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists k \in \mathbb{N}\ N^k = 0$

- A, C ähnlich, d.h. $A = BCB^{-1}$ mit $B \in \mathbb{R}^{n\times n} \Rightarrow e^{tA} = Be^{tC}B^{-1}$,

denn $e^{t(BCB^{-1})} = \sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!}(BCB^{-1})^n = \sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!} BC^nB^{-1} = Be^{tC}B^{-1}$.

- B, C kommutieren, d.h. $BC = CB \Rightarrow e^{t(B+C)} = e^{tB}e^{tC}$, denn

$$e^{t(B+C)} = \sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!}(B+C)^n = \sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^{n-k}C^k \overset{\text{absolut kgt}}{=}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^n}{(n-k)!\,k!} B^{n-k}C^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+k}}{n!\,k!} B^nC^k =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}B^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}C^k = e^{tB}e^{tC}$$

- A blockdiagonal, d.h. $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \Rightarrow e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{tB} & 0 \\ 0 & e^{tC} \end{pmatrix}$

- Jordan Normal-Form: Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist ähnlich zu einer blockdiagonalen Matrix aus Jordanblöcken der Form $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ Ergänzung

$$J = D + N, \quad D = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}, \quad DN = ND, \text{ also}$$

$$e^{tJ} = e^{tD} e^{tN} = e^{t\lambda} e^{tN}$$

Bsp: $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow e^{tJ} = e^{t\lambda} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$