Mathematik 3 für Physik (Analysis 2) Zentralübung 7

Notiztitel 03.06.2013

Konservative Vektorfelder

$F : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiet (offen, zush.)

- Ist F ein Gradientenfeld, so ist F konservativ, das Kurvenintegral von F ist wegunabhängig.

  Bestimmen eines Potentials ϕ: $x_0 \in U$. Dann ist für $x \in U$

  $$\phi(x) := \int_\gamma F(r) \cdot dr$$

  für eine beliebige Kurve $\gamma : [t_1, t_2] \to U$ mit $\gamma(t_0) = x_0$, $\gamma(t_1) = x$, die stückweise C^1 ist,

- Wann ist F ein Gradientenfeld?

(a) Notwendige Bedingung: $\partial_i F_k = \partial_k F_i \ \forall i,k = 1,\dots,n$ (d.i. $J_F(x)$ ist symmetrisch f.a. $x \in U$)

(b) Hinreichende Bedingung: (a) und U ist sternförmig

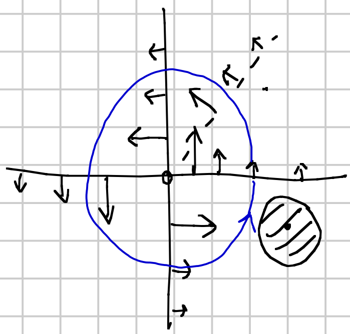
<u>Bemerkung</u>: Gilt $\partial_i F_k = \partial_k F_i \ \forall i,k \in 1,\dots,n$, dann ist F lokal ein Gradientenfeld, d.h., ist $B_r(x_0) \subseteq U$, so besitzt $F|_{B_r(x_0)}$ ein (lokales) Potential $\tilde{\phi} : B_r(x_0) \to \mathbb{R}$

Es kann passieren, dass diese lokalen Potentiale nicht zu einem globalen Potential zusammengesetzt werden können.

Beispiele: (i) $F(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ auf $\mathbb{R}^2$

$J_F(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ nicht symmetrisch $\Rightarrow F$ ist kein Gradientenfeld (auch nicht lokal)

(ii) $F(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$



$$\partial_1 F_2(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\partial_2 F_1(x,y) = -\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad //$$

$\Rightarrow F$ besitzt lokale Potentiale, aber

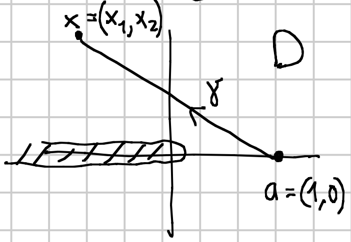
für $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ gilt

$$\oint_\gamma F(r)\cdot dr = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t))\,\dot\gamma(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = 2\pi \neq 0$$

$\Rightarrow F$ ist nicht konservativ $\Rightarrow F$ ist kein Gradientenfeld

$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist nicht sternförmig, aber

$D := \{\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_0^- \times \{0\})\}$ ist sternförmig.

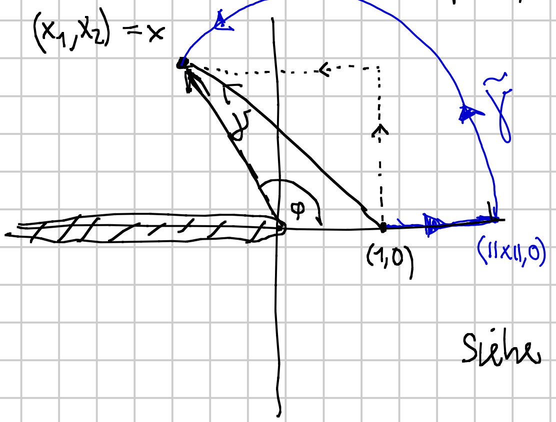


$\Rightarrow F|_D$ besitzt Potential

Nach Vorlesung:

$$\phi(x) = \int_\gamma F(r)\cdot dr \quad \text{mit } \gamma : [0,1] \to D,\ \gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 0 \end{pmatrix}$$

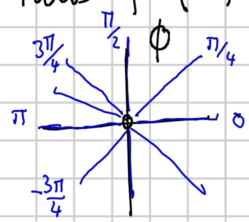
Zum Berechnen von $\phi(x)$:



Ergebnis $\phi(x) = \arg(x_1 + i x_2)$

$\arg: \mathbb{C}\setminus\{0\} \to (-\pi,\pi]$,

$\arg(re^{i\varphi}) = \varphi$ falls $\varphi \in (-\pi,\pi]$



siehe Hausaufgabe 7.2

Mehrdimensionales Newton-Verfahren

Lösen von n Gleichungen mit n Unbekannten

- Linearer Fall: $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$

  Lösung: Hat A vollen Rang, so ist $x = A^{-1}b$ die eindeutige Lösung.

- Nichtlinearer Fall $(n=2)$ $\quad f_1(x,y) = 0 \in \mathbb{R} \quad (1)$

  $f_2(x,y) = 0 \in \mathbb{R} \quad (2)$

  Löse (2) nach y auf, $y = g(x)$, setze in (1) ein und löse (1) $f_1(x, g(x)) = 0$ nach x auf

  Das geht selten explizit. Bsp: $x^3 + xy + y^3 = 0$

  $x^4 + xy + y^4 = \frac{1}{10}$

  d.h. finde Lösungen von $f(x,y) = 0 \in \mathbb{R}^2$ mit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

  $$f(x,y) = \begin{pmatrix} x^3 + xy + y^3 \\ x^4 + xy + y^4 - \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

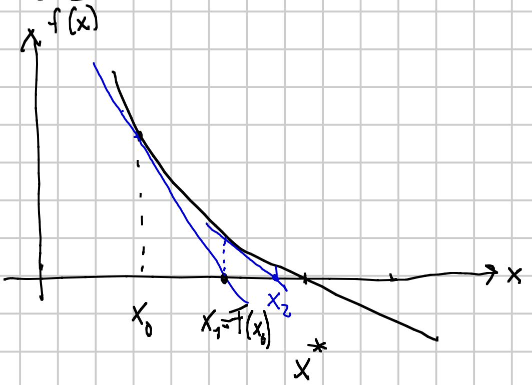
Erinnerung: eindimensionales Newton-Verfahren:

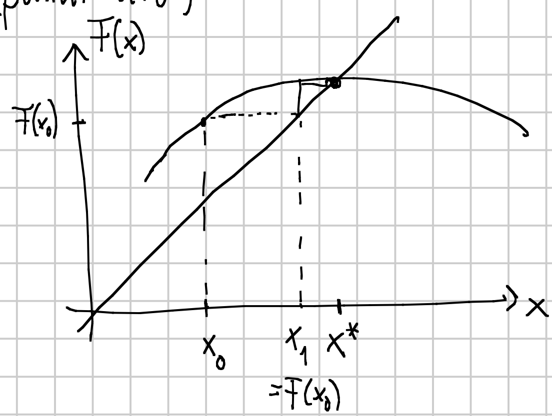
zu $f \in C^2(\mathbb{R})$ mit $f(x^*)=0$, $f'(x^*) \neq 0$. Definiere

$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Ist $x_0 \in \mathbb{R}$ nahe genug bei x^*, so

konvergiert die Folge (x_n), mit $x_{n+1} = F(x_n)$ (sehr schnell)

gegen x^* (Banachscher Fixpunktsatz)





Sei nun $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $x^* \in \mathbb{R}^n$ mit $f(x^*)=0$, $\det J_f(x^*) \neq 0$

Setze $F(x) = x - \underbrace{J_f(x)^{-1}}_{\in \mathbb{R}^{n\times n}} \underbrace{f(x)}_{\in \mathbb{R}^n} \in \mathbb{R}^n$

Dann ist $F(x^*) = x^*$

Ableiten: $F(x) = x - (f'(x))^{-1}(f(x))$

$$F'(x)(\Delta) = \Delta - \underbrace{((f'(x))^{-1})'}_{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n}(\Delta)\,(f(x)) - \underbrace{(f'(x))^{-1} f'(x)}_{Id}(\Delta)$$

"$\left(\frac{1}{g(t)}\right)' = -\frac{1}{g(t)} g'(t) \frac{1}{g(t)}$"

$$= \underbrace{\underbrace{(f'(x))^{-1}}_{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n} \circ \underbrace{f''(x)(\Delta)}_{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n} \circ \underbrace{(f'(x))^{-1}}_{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n}}_{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{, linear}} \underbrace{(f(x))}_{\mathbb{R}^n} \in \mathbb{R}^n$$

$\Rightarrow F'(x^*) = 0$, bzw. $J_F(x^*) = 0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Es gibt also ein ϵ-Ugb $B_\epsilon(x^*)$ mit $\|F'(x)\| < \frac{1}{2}$ für $x \in B_\epsilon(x^*)$.

Mit <u>Schrankensatz</u>: Seien $x, y \in B_\epsilon(x^*)$. Dann ist

$$\| F(y) - F(x)\| \leq \|F'\|_{[x,y]} \|y-x\| \leq \frac{1}{2}\|y-x\|.$$

D.h. F ist kontrahierend. Banachscher Fixpunktsatz: $x_0 \in B_\epsilon(x^*)$

$x_{n+1} := F(x_n)$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$.