Mathematatik 3 für Physik (Analysis 2) Zentralübung 6

Notiztitel 27.05.2013

Leibniz-Regel für Parameterintegrale

Sei $F : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$, ste diffbar

$g, h : [a,b] \to [c,d]$ ste diffbar;

dann gilt für $x \in [a,b]$

$$\frac{d}{dx} \int_{g(x)}^{h(x)} F(x,y)\,dy = \int_{g(x)}^{h(x)} \partial_1 F(x,y)\,dy + F(x,h(x))\,h'(x) - F(x,g(x))\,g'(x)$$

Bew: Setze $G(x,y,z) := \int_y^z F(x,\eta)\,d\eta \quad , y,z \in [c,d]$

Dann ist G stetig partiell diffbar nach x mit $\boxed{y = y}$

$$\partial_1 G(x,y,z) = \int_y^z \partial_1 F(x,\eta)\,d\eta \quad , \quad \partial_1 G \text{ ist stetig}$$

Ausserdem ist

$$\partial_2 G(x,y,z) = -F(x,y) \quad \text{stetig bzgl. } (x,y,z)$$

$$\partial_3 G(x,y,z) = F(x,z) \quad \text{stetig}$$

$$\frac{d}{dx} \int_{g(x)}^{h(x)} F(x,y)\,dy = \frac{d}{dx} \underbrace{G(x, g(x), h(x))}_{= (G \circ \phi)(x), \ \phi(x) = \begin{pmatrix} x \\ g(x) \\ h(x) \end{pmatrix}} = \partial_1 G(x, g(x), h(y)) \cdot 1 +$$

$$+ \partial_2 G(x, g(x), h(x))\,g'(x) + \partial_3 G(x, g(x), h(x))\,h'(x)$$

$$= \int_{g(x)}^{h(x)} \partial_1 F(x,\eta)\,d\eta - F(x, g(x))\,g'(x) + F(x, h(x))\,h'(x) \quad \blacksquare$$

Anwendung: $F(x) = \int_0^{x^2} \overbrace{\operatorname{atn} \frac{y}{x^2}}^{F(x,y)} \, dy$

$$F'(x) = \operatorname{atn} \frac{x^2}{x^2} \cdot 2x + \int_0^{x^2} \underbrace{\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^4}} \left(-\frac{2y}{x^3}\right)}_{\partial_1 F(x,y)} dy =$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot 2x - x \int_0^{x^2} \frac{\frac{2y}{x^4}}{1+\frac{y^2}{x^4}} \, dy = \frac{\pi}{2} x - x \cdot \left[\ln\left(1+\frac{y^2}{x^4}\right) \right]_0^{x^2}$$

$$= x\left(\frac{\pi}{2} - \ln 2\right)$$

$\Rightarrow$ mit $F(0) = 0$ folgt $F(x) = \frac{x^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \ln 2\right)$

Bsp zu Fubini: $0 < a < b$

$$\int_a^b \underbrace{x^y}_{e^{y \ln x}} \, dy = \frac{1}{\ln x}\left[x^b - x^a\right]$$

$(x,y) \mapsto x^y$ stetig auf $[0,1] \times [a,b]$

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \, dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_a^b x^y \, dy \right) dx \overset{\text{Fubini}}{=} \int_a^b \left(\int_0^1 x^y \, dx \right) dy = \int_a^b \left[\frac{x^{y+1}}{y+1} \right]_{x=0}^{x=1} dy$$

$$= \int_a^b \frac{1}{y+1} \, dy = \ln(b+1) - \ln(a+1) = \ln \frac{1+b}{1+a} .$$

Länge einer Kurve, Motivation

$\gamma \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$

Zerlegung

$\delta = \frac{t_1 - t_0}{N}$, $N \in \mathbb{N}$

Approximation der Länge

$$L_N(\gamma) = \sum_{i=0}^{N-1} \| \gamma(t_0+(i+1)\delta) - \gamma(t_0+i\delta) \|$$

Taylor: $\gamma(t+\delta) = \gamma(t) + \delta\gamma'(t) + \overbrace{\delta c_\delta(t)}^{o(\delta)}$

Es gilt $(\delta,t) \mapsto c_\delta(t)$ ist stetig und $\|c_\delta(t)\|_{\infty, t\in[t_0,t_1]} \xrightarrow{\delta\to 0} 0$

$$\Rightarrow L_N(\gamma) = \underbrace{\sum_{i=0}^{N-1} \delta \| \gamma'(t_0+i\delta)}_{\text{Riemannsumme}} + \underbrace{c_\delta(t_0+i\delta)}_{\downarrow \text{glm } 0} \| \xrightarrow{N\to\infty} \int_{t_0}^{t_1} \|\gamma'(t)\| dt \stackrel{\text{def}}{=} L(\gamma).$$

Anmerkung: Für das Kurvenintegral $\int_\gamma F(r)\cdot dr = \int_{t_0}^{t} F(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t) dt$

kann man eine analoge Betrachtung anstellen.

$\gamma \in C^1([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$ Länge der Kurve $L(\gamma) \in \mathbb{R}$

Bogenlänge $s_\gamma : [t_0,t_1] \to \mathbb{R}$ $s_\gamma(t) = \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(\tau)\| d\tau$ (s_γ ist Funktion!)

$L(\gamma) = s_\gamma(t_1)$, $s_\gamma(t) = L(\gamma|_{[t_0,t]})$

Potentiale von Gradientenvektorfeldern

Grundproblem: 1 Semester: Finde Stammfkt f von $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, stetig,

d.h. finde $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, s.d. $f' = g$

Lösung: $f(x) = \int_a^x g(\tilde{x}) d\tilde{x}$ (Riemannintegral)

Jetzt ist gegeben: Vektorfeld $F: U \to \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiet

Gibt es eine "Stammfunktion" (Potential) von F, d.h. gibt es

$$\Phi : U \to \mathbb{R} \text{ mit } \nabla\Phi = F \ ?$$

Wenn ja, finde ein solches Φ!

Wozu? Um Kurvenintegrale zu berechnen! Sei $\nabla\Phi = F$,

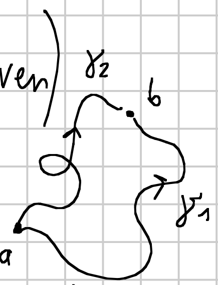
$\gamma \in C^1([t_0,t_1], U)$. Dann gilt

$$\int_\gamma F(r)\cdot dr \overset{\text{def}}{=} \int_{t_0}^{t_1} F(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t)\,dt \underset{\text{da } F \text{ Gradientenfeld}}{=} \Phi(\gamma(t_1)) - \Phi(\gamma(t_0))$$

Ist Φ bekannt, so können alle Kurvenintegrale ohne weitere Integration ausgewertet werden.

Ergebnisse:

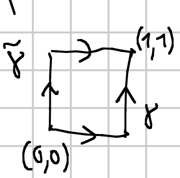
F ist konservativ $\left(\oint_\gamma F(r)\cdot dr = 0 \text{ f.a. geschl. Kurven}\right)$



$\Leftrightarrow$ Das Kurvenintegral von F ist wegunabh.

$\Leftrightarrow$ F ist Gradientenfeld (d.h. F besitzt Potential)

Bsp.: 1. Ist $F(x,y) = \begin{pmatrix} 1+y \\ y-x \end{pmatrix}$ auf $\mathbb{R}^2$ ein Gradientenfeld?



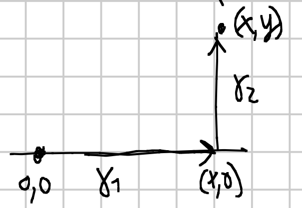
$$\int_\gamma F(r)\cdot dr = \int_0^1 F(t,0)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}dt + \int_0^1 F(1,t)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}dt$$

$$= \int_0^1 1\,dt + \int_0^1 (t-1)\,dt = 1 + \tfrac{1}{2} - 1 = \tfrac{1}{2}$$

$$\int_{\tilde\gamma} F(r)\cdot dr = \int_0^1 F(0,t)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}dt + \int_0^1 F(t,1)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}dt = \int_0^1 t\,dt + \int_0^1 2\,dt = 2\tfrac{1}{2} \neq \tfrac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ Kurvenint nicht wegunabh. $\Rightarrow$ Es gibt kein Potential

2. $G(x,y) = \begin{pmatrix} 1+y \\ x-y \end{pmatrix}$ ist ein Gradientenfeld. Bestimme ein Potential:



Setze $\phi(0,0) = 0$

Dann ist $\phi(x,y) = \int\limits_{\gamma_1+\gamma_2} G(r)\cdot dr = \int\limits_0^x G(\xi,0)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} d\xi + \int\limits_0^y G(x,\eta)\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} d\eta$

$$= \int\limits_0^x 1\, d\xi + \int\limits_0^y (x-\eta)\, d\eta = x + xy - \frac{y^2}{2}$$

Probe $\nabla\phi(x,y) = \begin{pmatrix} 1+y \\ x-y \end{pmatrix} = G(x,y)$ ☒