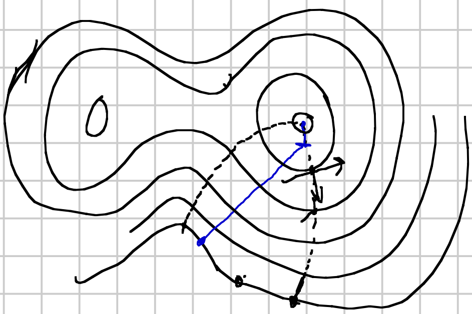
Mathematik 3 für Physik (Analysis 2) Zentralübung 4

Notiztitel 13.05.2013

- Abgabe Blatt 4 : bis 12:00 22.5.2013 . oder in T4
- SVV : Morgen 10-12. T02 fällt aus.
- Mo 24. Juni 12^{00} PH HS1 Probeklausur

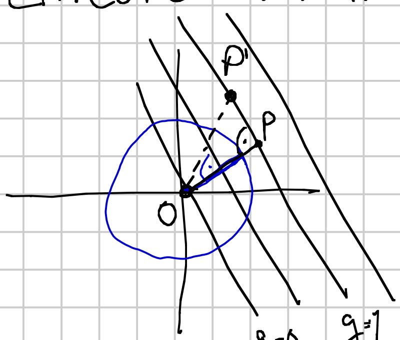
Gradient und steilster Anstieg

Höhenfunktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

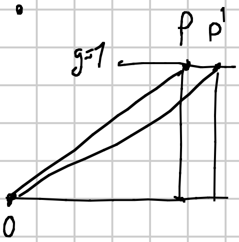


Steilster Anstieg $\parallel$ Gradienten !? (ja, bei eukl. Metrik)

Lineare Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $g(x,y) = (a\ b)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax + by$



Steilster Anstieg in Richtung $P \in \mathbb{R}^2$
wobei $g(P) = 1$ und $d(0,P)$ minimal.
oder $|P| = 1$ und $g(P)$ maximal

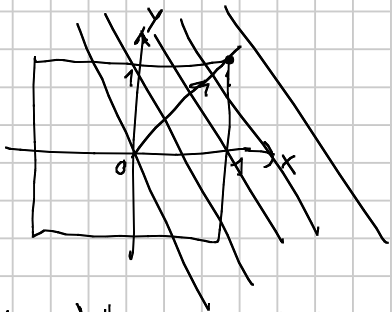


euklidisch $\Rightarrow$

$P \in \mathbb{R}^2$ steht senkrecht auf $\{ g(x,y) = 0 \}$

Maximumsnorm $\|(x,y)\|_\infty = \max\{|x|,|y|\}$

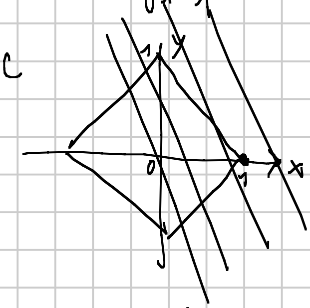
„Einheitssphäre"



steilster Anstieg: immer diagonal oder nicht eindeutig

Betragsnorm: $\|(x,y)\|_1 = |x|+|y|$

Einheitssphäre



Steilster Anstieg: immer axenparallel oder nicht eindeutig

Stetige Differenzierbarkeit

Erinnerung: $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ diffbar

$\Rightarrow f':\mathbb{R}^n\to B(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m)$ existiert

Nun gilt f' stetig $\Leftrightarrow J_f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{m\times n}$ stetig

$\Leftrightarrow \partial_i f_j:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ stetig für $i=1,\dots,n$, $j=1,\dots,m$.

Das zeigt f diffbar: f ste diffbar $\Leftrightarrow$ f ste padi

Vorlesung: f ste padi $\Rightarrow$ f diffbar

$$\begin{array}{ccc}
f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m \text{ stetig} & \not\Leftarrow & \text{part. diffbar} \\
\Uparrow & & \Uparrow \\
\text{diffbar} & \begin{array}{c}\not\Leftarrow \\ \Rightarrow \\ \not\Leftarrow\end{array} & \text{alle Richtungsabl. existieren} \\
\Uparrow & \nearrow & \Uparrow \\
\text{stetig diffbar} & \Leftrightarrow & \text{ste partiell diffbar}
\end{array}$$

Beispiele: Polarkoordinaten $\phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\cancel{f = \tilde{f} \circ \phi}$

- $\tilde{f}(r,\varphi) = \cos\varphi \Rightarrow f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ dann $f(\phi(r,\varphi)) = \tilde{f}(r,\varphi)$ $(\tilde{f} = f \circ \phi)$
  $f(0,0) = 0$ unstetig, nicht part. diffbar (im Ursprung)

- $\tilde{f}(r,\varphi) = \cos\varphi \sin\varphi \Rightarrow f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ unstetig, partiell diffbar
- $\tilde{f}(r,\varphi) = r\cos\varphi\sin\varphi \Rightarrow f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ stetig, partiell diffbar, Richtungsabl existieren, aber nicht diffbar $(\partial_{(1,1)} f(0,0))$
- $\tilde{f}(r,\varphi) = r\cos\varphi \Rightarrow f(x,y) = x$ ste diffbar

---

Höhere Ableitungen

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ C^∞. Dann ist

$f': \mathbb{R}^n \to B(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

$f'': \mathbb{R}^n \to B(\mathbb{R}^n, B(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$

$\vdots$

$\|B\| = \sup_{\|x\|=1} \|Bx\|$

$\left(: \|AB\| \leq \|A\| \, \|B\| \right)$

Bsp: $f: \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ $f(A) = A^2$

1. Ableitung: Beh: $f'(A): \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ lin., $f'(A)(B) = AB + BA$

Bew: $\frac{1}{\|B\|} \left\| f(A+B) - f(A) - f'(A)(B) \right\| = \frac{1}{\|B\|} \|(A+B)^2 - A^2 - AB - BA\|$

$= \frac{1}{\|B\|} \|B^2\| \leq \frac{\|B\|^2}{\|B\|} = \|B\| \xrightarrow{\|B\| \to 0} 0$

$\left[A^3 = A \cdot A^2 \text{ Abl.?} \right]$

2. Ableitung Beh: $f''(A): \mathbb{R}^{n\times n} \to (\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n})$, d.h.

$$f''(A)\big(\underset{\overset{\cap}{\mathbb{R}^{n\times n}}}{B}\big) : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}. \quad \boxed{f''(A)(B)(C) = CB + BC \in \mathbb{R}^{n\times n}}$$

Bew: $f' : \mathbb{R}^{n\times n} \to B(\mathbb{R}^{n\times n}, \mathbb{R}^{n\times n})$ ist linear

$$f'(A+\lambda\tilde{A})(B) = (A+\lambda\tilde{A})B + B(A+\lambda\tilde{A}) = f'(A)(B) + \lambda f'(\tilde{A})(B)$$

$$\Rightarrow f''(A) = f'$$

$$f''(A)(B)(C) = f'(B)(C) = BC + CB \qquad \blacksquare$$

3. Ableitung: $f'''(A)(B)(C)(D) = 0$, da f'' konstant.

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{\cancel{m}}$$

$$\mathbb{R} \ni \underbrace{f'(x)}_{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}}(\Delta) = J_f(x)\Delta = \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(x)\Delta_j \qquad \text{bzw:}$$

$$\partial_j f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1,\dots,x_j+h,\dots x_n) - f(x)}{h} \underset{\gamma(h)=(0,\dots,0,h,0\dots,0)}{\overset{\text{Kettenregel}}{=}} f'(x)\gamma'(0) = f'(x)(e_j) = \partial_{e_j} f(x)$$

$$\text{Beh: } f''(x)(\Delta^{(1)})(\Delta^{(2)}) = \sum_{j,i=1}^{n} \underbrace{\partial_i \partial_j f(x)}_{\in\mathbb{R}} \underbrace{\Delta_j^{(1)}}_{\in\mathbb{R}} \underbrace{\Delta_i^{(2)}}_{\in\mathbb{R}}$$

Bew: $\partial_j f(x) = (\partial_{e_j} f)(x) = f'(x)(e_j)$

$$\partial_i \partial_j f(x) = \partial_i(\partial_{e_j} f)(x) = \partial_i\big(\tilde{x} \mapsto f'(\tilde{x})(e_j)\big)(x)$$

$$= \partial_{e_i}\big(\tilde{x} \mapsto f'(\tilde{x})(e_j)\big)(x)\big) = \big(\tilde{x} \mapsto f'(\tilde{x})(e_j)\big)'(x)(e_i)$$

$\underset{=}{\text{Produktregel}}$ $\left[\left(\tilde{x} \mapsto f''(\tilde{x})(e_j)\right)(x)\right](e_i)$

$$= \left[f''(x)(e_j)\right](e_i)$$

$$\Delta^{(1)} = \sum_{j=1}^{n} \Delta_j^{(1)} e_j$$

$$f''(x)\left(\Delta^{(1)}\right)\left(\Delta^{(2)}\right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} f''(x)(e_j)(e_i)\, \Delta_j^{(1)} \Delta_i^{(2)}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \partial_i \partial_j f(x)\, \Delta_j^{(1)} \Delta_i^{(2)} \qquad \boxed{}$$