Mathematatik 3 für Physik (Analysis 2) Zentralübung 2

Notiztitel 29.04.2013

T1 aufgelöst

T2 Di 10 Prähofer

T3 Di 12 Kampfmann

T4 Mi 8:30 Häse einmalig am 2.5, Do. 16:00 Raum?

T5 Do 8:30 Prähofer

T6 Do 14 Badal

T7 Do 16 Kathan

T8 Fr 8:30 Kimzner

T9 Fr 10 Rosenblüh

T10 Fr 10 Reitzner (auf Englisch)

Stetigkeit von Funktionen $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

z.B. $f(x,y) = e^{\sin(x+y^2)} \cosh y^3$ stetig?

1. $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow$ $f: \mathbb{R}^d \ni x \mapsto h(x_j)$ stetig $j=1,\dots,d$

Bew: (Folgenstetigkeit) $\mathbb{R}^d \ni x_n \to x \in \mathbb{R}^d$, d.h. $\|x_n - x\|_2 \to 0$

Dann gilt $|x_{n,j} - x_j| \le \sqrt{\sum_{i=1}^d (x_{n,i} - x_i)^2} = \|x_n - x\|_2 \to 0$

also $x_{n,j} \to x_j$ für $n \to \infty$ und damit

$f(x_n) = h(x_{n,j}) \longrightarrow h(x_j) = f(x)$. d.h. f ist stetig in x

für beliebiges $x \in \mathbb{R}^n$

2. $f, g: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

(i) $f+g$, $f \cdot g$ stetig, denn für $x_n \to x$ folgt

$$\lim_{n\to\infty}(f+g)(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \lim_{n\to\infty} g(x_n) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$$

analog für $f \cdot g$.

(ii) $\frac{f}{g}(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$ stetig in x falls $g(x) \neq 0$

Sei $x_n \to x$ mit $g(x) \neq 0$. Dann gibt es $N \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall n \geq N$ gilt $g(x_n) \neq 0$, da 0 kein Häufungspunkt von $g(x_n)$ ist.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{\lim_{n\to\infty} f(x_n)}{\lim_{n\to\infty} g(x_n)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

(iii) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig, $g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^\ell$ stetig $\Rightarrow$ $g \circ f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\ell$ stetig

Somit $(x,y) \mapsto y^2$ stetig (1)

$(x,y) \mapsto \cosh y^3$ stetig (1)

$(x,y) \mapsto x+y^2$ stetig (1) und (2i)

$(x,y) \mapsto e^{\sin(x+y^2)}$ stetig (2(iii))

$(x,y) \mapsto e^{\sin(x+y^2)} \cos y^3$ stetig (2i)

Aber $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ $f(0,0) = 0$, stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

unstetig in 0 $f(0, \frac{1}{n}) = 0 = f(0,0)$

$f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \frac{1}{2} \neq f(0,0)$

Homöomorphie

M, N metrische Räume, $f: M \to N$ Homöomorphismus (stetig, bij, f^{-1} stetig)

Dann heißen M und N homöomorph, $M \sim N$.

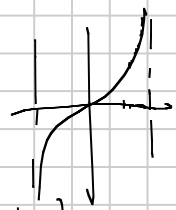
In M und N stimmen topologische Begriffe überein:

(a_n) konvergent in $M \Leftrightarrow f(a_n)$ kgt in N

$A \subseteq M$ offen, abg., kompakt, zush., wegzush. $\Leftrightarrow f(A) \subseteq N$ ebenso

Achtung: Beschränktheit und Cauchyfolge, Vollständigkeit sind metrische Begriffe

Bsp: $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \ni t \mapsto \tan t \in \mathbb{R}$ Homöomorph.



$\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}$ $\qquad$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\right)$ $\qquad$ $\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), |\cdot|\right)$

Bem: Homöomorphie von metrischen Räumen ist Äquivalenzrelation

(i) $M \sim M$ mittels $id: M \to M$

(ii) $M \sim N \Rightarrow N \sim M$ mittels Umkehrabb.

(iii) $M \sim N, N \sim O \Rightarrow M \sim O$ mittels Komposition

Bsp: • $\mathbb{R} \sim \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \underset{\uparrow \text{affin}}{\sim} (0,1)$

• $\mathbb{R}_0^+ \sim [0,1) \sim [a, \infty) \sim (-\infty, a]$

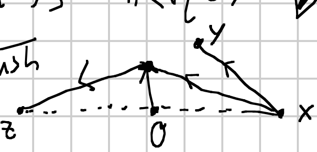
• $\underset{\text{nicht kp}}{\mathbb{R}}$ ist nicht homöomorph zu $\underset{\text{kp}}{[0,1]}$

• $\underset{\text{nicht zush}}{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$ ist nicht homöomorph zu $\underset{\text{zush.}}{\mathbb{R}}$

• $\mathbb{R}$ ist nicht homöomorph zu $\mathbb{R}^n, n \geq 2$.

Ann: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Homöom.: $\quad f(\underbrace{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}_{\text{zush}}) = \underbrace{\mathbb{R} \setminus \{f(0)\}}_{\text{nicht zush}} \sim \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ↯

$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ zush, da wegzush.



Kompaktheit

$A \subseteq (X,d)$ ist kompakt, wenn jede Folge in A eine in A konvergente Teilfolge (TF) besitzt

Satz aus der Vorl. X, Y metr. Räume, X kp und $f: X \to Y$ stetig. Dann

(i) $f(X)$ ist kompakt (Insbes., wenn $Y = \mathbb{R}$ ist, dann ist f beschränkt und nimmt ihr Supremum in X an. Maximierungsprobleme!)

(ii) f ist glm stetig auf X

(iii) f bij $\Rightarrow$ f ist Homöomorphismus.

Bew von (ii) f glm stetig heißt: $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in X: d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon$

Annahme: f ist nicht glm stetig, d.h. $\exists \epsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x, y \in X: d(x,y) < \delta \wedge d(f(x), f(y)) \geq \epsilon$

Sei $\epsilon > 0$ so gewählt. Zu $\delta = \frac{1}{n}$ gibt es Folgen $(x_n)(y_n)$ mit $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ und $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \epsilon$.

X ist kp. Also gibt es TF $x_{n_k} \to x \in X$ und TTF $y_{n_{k_\ell}} \to y \in X$

Es gilt $d(x,y) \leq \underbrace{d(x, x_{n_{k_\ell}})}_{\to 0} + \underbrace{d(x_{n_{k_\ell}}, y_{n_{k_\ell}})}_{< \frac{1}{n_{k_\ell}}} + \underbrace{d(y_{n_{k_\ell}}, y)}_{\to 0} \to 0 \Rightarrow d(x,y) = 0$

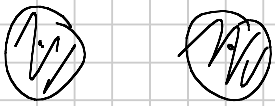
$\Rightarrow x = y$

$$\lim_{\ell \to \infty} d(f(x_{n_{k_\ell}}), f(y_{n_{k_\ell}})) \overset{d \text{ stetig}}{=} d\left(\lim_{\ell \to \infty} f(x_{n_{k_\ell}}), \lim f(y_{n_{k_\ell}})\right) \overset{f \text{ stetig}}{=}$$

$$= d(f(x), f(x)) = 0. \ \text{W} \ d(f(x_n), f(y_n)) \geq \epsilon$$

$\blacksquare$

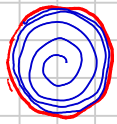
Zusammenhang



nicht zush

nicht wegzush.

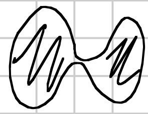
Korrektur nach der ZÜ:



zush

nicht wegzush.

$\{|z|=1\} \cup \{ e^{ti - \frac{1}{t}} \mid t \in \mathbb{R}^+ \}$



zush.

wegzush.

(X,d) metr. Raum

Erinnerung

- X heißt nicht zush, wenn es $U_1, U_2 \subseteq X$, offen disjunkt und nicht leer gibt, s.d. $U_1 \cup U_2 = X$
- $A \subseteq X$ heißt nicht zush., wenn (A,d) nicht zush. ist, d.h. wenn es $U_1, U_2 \subseteq X$ offen, disjunkt gibt, so dass $U_1 \cap A$, $U_2 \cap A$ nicht leer und $U_1 \cup U_2 \supseteq A$.
- Eine Menge heißt zusammenhängend, wenn sie nicht nicht zush. ist.
- $A \subseteq X$ heißt wegzush., wenn je zwei Punkte $x, y \in A$ durch eine stetige Kurve $\gamma \in C([0,1], X)$ verbunden werden können, d.h $\gamma(0)=x$, $\gamma(1)=y$.

Bem:
- wegzush $\Rightarrow$ zush. (immer!)
- $A \subseteq \mathbb{R}^n$ offen: wegzush $\Leftrightarrow$ zush.