....
Note

Name	Vorname

Matrikelnummer — Studiengang (Hauptfach) — Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
Σ		

I .... Erstkorrektur

II .... Zweitkorrektur

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Fakultät für Mathematik

Wiederholungsklausur
Mathematik für Physiker 3
(Analysis 2)

Prof. Dr. M. Wolf

27. September 2013, 15:00 – 16:30 Uhr

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **7** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: ein selbsterstelltes Din A4 Blatt

Erreichbare Gesamtpunktzahl: **80 Punkte**

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen.
Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

Musterlösung (mit Bewertung)

1. **Sternförmige Mengen sind zusammenhängend** **[10 Punkte]**

(a) Kreuzen Sie genau die wahren Aussagen an.
Für eine stetige Funktion gilt:

- ☒ Die Bilder zusammenhängender Mengen sind wieder zusammenhängend.
- ☐ Die Urbilder zusammenhängender Mengen sind wieder zusammenhängend.

(b) Geben Sie eine Charakterisierung für eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ an, die *nicht* zusammenhängend ist.

(c) Wie lautet die Definition einer sternförmigen Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$?

(d) Zeigen Sie, dass jede sternförmige Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ zusammenhängend ist.

LÖSUNG:

(a) (i) Satz aus der Vorlesung.
(ii) Gegenbeispiel: $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$, ist stetig. Das Urbild von $\{0\}$, nämlich $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ist nicht zusammenhängend. **[2]**

(b) M ist nicht zusammenhängend, wenn es zwei offene disjunkte Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt mit $A \cap M \neq \emptyset$, $B \cap M \neq \emptyset$ und $M \subseteq A \cup B$. **[2]**

(c) Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt sternförmig, wenn es ein $a \in M$ gibt, so dass für alle $x \in M$ auch die Verbindungsstrecke zwischen a und x in M enthalten ist, d.h., für alle $\lambda \in [0, 1]$ gilt $(1 - \lambda)a + \lambda x \in M$. **[2]**

(d) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ sternförmig mit zugehörigem Zentrum $a \in M$.
Annahme: M ist nicht zusammenhängend. Es gibt also offen disjunkte $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $A \cap M \neq \emptyset$, $B \cap M \neq \emptyset$ und $M \subseteq A \cup B$.
Sei, ohne Einschränkung, $a \in A$. Wegen $B \cap M \neq \emptyset$ gibt es ein $x \in B \cap M$. Die Funktion $\gamma : [0, 1] \to M$, $\gamma(\lambda) = (1 - \lambda)a + \lambda x$ ist stetig, $[0, 1]$ ist zusammenhängend. Das Bild $\gamma([0, 1])$ ist nicht zusammenhängend, da $a \in A \cap \gamma([0, 1]) \neq \emptyset$, $x \in B \cap \gamma([0, 1]) \neq \emptyset$ und $A \cup B \supseteq M \supseteq \gamma([0, 1])$. Widerspruch.
Die Annahme ist also falsch und damit ist M zusammenhängend. **[4]**

Alternativ: Da M sternförmig ist, ist M offenbar wegzusammenhängend, denn je zwei Punkte $x, y \in M$ können durch die beiden Streckenzüge von x zu a und dann von a zu y stetig verbunden werden. Nach Vorlesung ist M dann auch zusammenhängend.

2. **Differenzierbarkeit** **[10 Punkte]**

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq 0, \\ 0 & \text{für } (x,y) = 0. \end{cases}$$

(a) Wie lauten die partiellen Ableitungen im Ursprung?

$\partial_x f(0,0) = 0$ **[1]**	$\partial_y f(0,0) = -1$ **[1]**

(b) Wie lautet die Richtungsableitung in Richtung $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ im Ursprung?

$\partial_v f(0,0) = v_2 \frac{v_1^2-v_2^2}{v_1^2+v_2^2}$ **[2]**

(c) Ist f differenzierbar im Ursprung? **[2]**

☐ Ja ☒ Nein

(d) Zeigen Sie, dass $\partial_x f$ im Ursprung unstetig ist. **[4]**

LÖSUNG:

(a) $\partial_x f(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$. $\partial_y f(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{0-h^3}{h\cdot h^2} = -1$.

(b) $\partial_v f(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(tv_1,tv_2)-f(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{t^3v_1^2v_2-t^3v_2^3}{t(t^2v_1^2+t^2v_2^2)} = v_2\frac{v_1^2-v_2^2}{v_1^2+v_2^2}$.

(c) Nein, wäre f im Ursprung differenzierbar, so hieße das, dass

$$\partial_{(1,1)} f(0) = f'(0)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\partial_x f(0)\ \partial_y f(0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = -1.$$

Aber nach (b) ist $\partial_{(1,1)} f(0) = 1 \cdot \frac{1-1}{1+1} = 0$. Widerspruch.

(d) Für $(x,y) \neq 0$ ist **[2]**

$$\partial_x f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2} - y\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}2x = \frac{2xy(x^2-y^2)-2xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

Für $(x_n,y_n) = (\frac{1}{n},\frac{1}{n})$ gilt **[1]**

$$\lim_{n\to\infty} \partial_x f(x_n,y_n) = \frac{4\frac{1}{n^4}}{(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2})^2} = \frac{4}{4} = 1 \neq \partial_x f(0,0).$$

Also ist $\partial_x f$ im Ursprung unstetig. **[1]**

3. **Taylorentwicklung** **[10 Punkte]**

Sei $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$.

(a) Berechnen sie alle Terme der Taylorentwicklung von f bis zur dritten Ordnung im Entwicklungspunkt $(1,1)$.
HINWEIS: Betrachten Sie $f(1+u, 1+v)$. Sie müssen keine Ableitungen berechnen.

(b) Geben Sie in möglichst einfacher Form die Funktion $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an, deren Graph die Tangentialebene an den Graphen von f im Punkt $(1,1)$ ist. **[3]**

$$\boxed{T(x,y) = \frac{x-y}{2}}$$

LÖSUNG:

(a)

$$\begin{aligned} f(1+u,1+v) &= \frac{u-v}{2+u+v} = \frac{u-v}{2} \cdot \frac{1}{1+(\frac{u+v}{2})} \\ &= \tfrac{1}{2}(u-v)\Big(1 - \tfrac{1}{2}(u+v) + \tfrac{1}{4}(u+v)^2 + \cdots\Big) \\ &= 0 + \tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{4}v^2 - \tfrac{1}{4}u^2 + \tfrac{1}{8}(u^3 + u^2v - uv^2 - v^3) + \mathcal{O}(\|(u,v)\|^4) \end{aligned}$$

(b) T ist die lineare Approximation von f im Punkt $(1,1)$, also

$$T(1+u,1+v) = 0 + \tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{2}v.$$

Somit ist $T(x,y) = \frac{x-1}{2} - \frac{y-1}{2} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y$

4. **Gradientenfelder** **[14 Punkte]**

Das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^2\cos(xy^2) \\ 2xy\cos(xy^2) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestätigen Sie, dass $\operatorname{rot} F = 0$. **[3]**

(b) Warum ist F ein Gradientenfeld? **[2]**

(c) Welchen Wert hat das Kurvenintegral $\int_\gamma F(r)\cdot dr$ für $\gamma(t) = (2\cos t, \sin t, -\cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$? **[2]**

(d) Bestimmen Sie ein Potential V von F. **[4]**

(e) Welchen Wert hat das Kurvenintegral $\int_\gamma F(r)\cdot dr$ für $\gamma(t) = (\frac{\pi}{2}t, e^{t^2-1}, \arctan t)$, $t \in [-1, 1]$? **[3]**

Lösung:

(a) $\partial_2 F_1(x,y,z) = 2y\cos(xy^2) - 2xy^3\sin(xy^2) = \partial_1 F_2(x,y,z)$, $\partial_3 F_2(x,y,z) = 0 = \partial_2 F_3(x,y,z)$, $\partial_1 F_3(x,y,z) = 0 = \partial_3 F_1(x,y,z)$. Somit ist $\operatorname{rot} F(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \\ \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 \\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \end{pmatrix}(x,y,z) = 0$

(b) $\operatorname{rot} F = 0$ und der Definitionsbereich von F, $\mathbb{R}^3$ ist sternförmig. Oder Verweis auf (c).

(c) $\partial_1 V(x,y,z) = y^2\cos(xy^2)$, also $V(x,y,z) = \sin(xy^2) + c(y,z)$.
$\partial_2 V(x,y,z) = 2xy\cos(xy^2)$, also $V(x,y,z) = \sin(xy^2) + \tilde{c}(x,z)$.
$\partial_3 V(x,y,z) = 1$, also $V(x,y,z) = z + \tilde{\tilde{c}}(x,y)$. Insgesamt also ist

$$V(x,y,z) = \sin(xy^2) + z$$

ein Potential von F.

(d) γ ist eine geschlossene Kurve. Da F als Gradientenfeld konservativ ist, gilt $\int_\gamma F(r)\cdot dr = 0$.

(e) Da F ein Gradientenfeld ist gilt

$$\begin{aligned}\int_\gamma F(r)\cdot dr &= V(\gamma(1)) - V(\gamma(-1)) = V(\tfrac{\pi}{2}, 1, \tfrac{\pi}{4}) - V(-\tfrac{\pi}{2}, 1, -\tfrac{\pi}{4}) \\ &= \sin(\tfrac{\pi}{2}) + \tfrac{\pi}{4} - \sin(-\tfrac{\pi}{2}) + \tfrac{\pi}{4} = 2 + \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

5. **Extrema mit Nebenbedingungen** **[14 Punkte]**
Ein Zylinder im $\mathbb{R}^3$ habe eine kreisförmige Grundfläche mit Radius $r > 0$ und die Höhe $h > 0$.

(a) Geben Sie die Gesamtoberfläche $f(r, h)$ und das Volumen $g(r, h)$ des Zylinders an. **[2]**

(b) Bestimmen Sie bei vorgegebenem Zylindervolumen $V > 0$ mit Hilfe der Methode der Lagrange-multiplikatoren Radius r und Höhe h des Zylinders so, dass die Zylinderoberfläche extremal ist. **[8]**

(c) Begründen Sie, warum die in (b) gefundene Lösung das eindeutige *absolute Minimum* für die Oberfläche des Zylinders bei gegebenem Volumen ist. **[4]**

Lösung:

(a) Oberfläche $f(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$, **[1]**
Volumen $g(r, h) = \pi r^2 h$. **[1]**

(b) Gesucht sind Extremalpunkte von f unter der Nebenbedingung $g(r, h) = V$.
V ist regulärer Wert von g, da $\operatorname{grad} g(r, h) = \binom{2\pi rh}{\pi r^2} \neq 0$ falls $r \neq 0$ und $h \neq 0$. Dies gilt, sonst wäre $g(r, h) = 0$. **[1]**
Extremalpunkte erfüllen die Euler-Lagrange-Gleichung **[1]**

$$\operatorname{grad} f(r, h) = \lambda \operatorname{grad} g(r, h),$$

also die Gleichungen **[2]**

$$\begin{aligned} 4\pi r + 2\pi h &= \lambda \cdot 2\pi rh \\ 2\pi r &= \lambda \pi r^2 \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung ergibt $r = \frac{2}{\lambda}$. **[1]**
Eingesetzt in die erste ergibt sich weiter $h = \frac{4}{\lambda}$. **[1]**
Eingesetzt in die Nebenbedingung $g(r, h)$ erhält man $V = g(\frac{2}{\lambda}, \frac{4}{\lambda}) = \frac{16\pi}{\lambda^3}$, also $\lambda = \sqrt[3]{\frac{16\pi}{V}}$. **[1]**
Somit ist die Oberfläche für $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ und $h = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$ extremal. **[1]**

(c) Bei vorgegebenem Radius r und festem Volumen V des Zylinders ist die Höhe $h = \frac{V}{\pi r^2}$, die Oberfläche ist dann gegeben durch $\tilde{f}(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$. **[1]**
Aus (b) wissen wir, dass $\tilde{f}'(r) \neq 0$ für $r \neq \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ gilt. Da $\tilde{f}$ stetig differenzierbar ist, muss $\tilde{f}$ rechts und links von $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ jeweils streng monoton fallend oder steigend sein. Wegen $\lim_{r\to 0} \tilde{f}(r) = \infty$ und $\lim_{r\to\infty} \tilde{f}(r) = \infty$ muss $\tilde{f}$ links fallen und rechts steigen, der Punkt $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ ist also ein absolutes Minimum. **[3]**

6. **Trennbare Differentialgleichungen** **[12 Punkte]**

Gegeben ist die Differentialgleichung $\dot{x} = f(t,x)$ mit $f(t,x) = (1-x^2)\cos t$.

(a) Welche der folgenden Eigenschaften ist hinreichend für die lokale Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen obiger Differentialgleichung? **[2]**

- ☐ f ist stetig
- ☐ f ist erstes Integral
- ☒ f ist stetig differenzierbar
- ☒ f ist lipschitzstetig
- ☒ f ist lokal lipschitzstetig

(b) Welche der folgenden Eigenschaften besitzt die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$? **[2]**

- ☒ f ist stetig
- ☐ f ist erstes Integral
- ☒ f ist stetig differenzierbar
- ☐ f ist lipschitzstetig
- ☒ f ist lokal lipschitzstetig

(c) Geben Sie alle auf ganz $\mathbb{R}$ definierten *konstanten* Lösungen der Differentialgleichung an.

$x_1(t) = 1,\ x_2(t) = -1,\ t \in \mathbb{R}$ **[2]**

(d) Bestimmen Sie ein erstes Integral $E(t,x)$ für die Differentialgleichung.
Hinweis: Partialbruchzerlegung. **[3]**

(e) Finden Sie eine Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung mit dem Anfangswert $x(0) = 0$. **[3]**

Lösung:

(a) stetige Differenzierbarkeit und die daraus folgende lokale Lipschitzstetigkeit sind hinreichend für die lokale Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen. Stetigkeit genügt i.A. nicht. f ist weder erstes Integral noch lipschitzstetig.

(b) Die Bedingung $\dot{x}(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ führt auf $0 = (1-x^2)\sin t$, also $x = \pm 1$.

(c) Trennung der Variablen liefert als erstes Integral

$$\begin{aligned} E(t,x) &= \int \cos t dt - \int \frac{1}{1-x^2} dx = \sin t - \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right) dx \\ &= \sin t - \frac{1}{2}(-\ln|1-x| + \ln|1+x|) = \sin t - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| \end{aligned}$$

(d) Auflösen der Gleichung $E(t,x) = E(0,x(0)) = 0$ nach x ergibt für $x \in (-1,1)$

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\ln\tfrac{1+x}{1-x} &= \sin t \\ \tfrac{1+x}{1-x} &= e^{2\sin t} \\ x &= \tfrac{e^{2\sin t}-1}{e^{2\sin t}+1} \quad \left(= \tfrac{e^{\sin t}-e^{-\sin t}}{e^{\sin t}+e^{-\sin t}} = \tanh(\sin t)\right), \end{aligned}$$

da aus $\frac{1+x}{1-x} = c$ schnell $x = \frac{c-1}{c+1}$ folgt. Also ist $x(t) = \tanh(\sin t)$ die Lösung des AWP.

7. **Variationsrechnung** **[10 Punkte]**

Gegeben ist das Funktional $F(x) = \int_1^2 t^2 \dot{x}(t)^2 dt$ für $x \in C^2([1,2])$ mit den Randbedingungen $x(1) = 7$, $x(2) = 5$.

(a) Wie lautet die Lagrange-Funktion $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zu diesem Problem? **[2]**

$L(t, x, v) = t^2 v^2$

(b) Wie lautet explizit die Euler-Lagrange-Gleichung von F für $x \in C^2([1,2])$? **[3]**

$2t\dot{x}(t) + t^2\ddot{x}(t) = 0$

(c) Geben Sie ein erstes Integral $E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ für die Euler-Lagrange-Gleichung des Funktionals F an. **[2]**

$E(t, x, v) = \partial_v L(t, x, v) = 2t^2 v$

(d) Finden Sie mit Hilfe der allgemeinen Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung, $x(t) = \frac{c_1}{t} + c_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, den stationären Punkt $x^*(t)$ von F. **[3]**

$x^*(t) = \dfrac{4}{t} + 3$

LÖSUNG:

(a) $F(x) = \int_1^2 L(t, x(t), \dot{x}(t))dt$ mit der Lagrangefunktion $L(t, x, v) = t^2 v^2$.

(b) $\frac{d}{dt}\partial_v L - \partial_x L = 0$ ergibt $2t\dot{x} + t^2\dot{x} = 0$.

(c) Da die Lagrangefunktion nicht explizit vom Ort abhängt ist $E(t, x, v) = \partial_v L(t, x, v) = 2t^2 v$ eine Konstante der Bewegung.

(d) Die Randbedingungen für $x(t) = \frac{c_1}{t} + c_2$ ergeben $7 = x(1) = c_1 + c_2$, $5 = x(2) = \frac{1}{2}c_1 + c_2$, also $c_1 = 2(7 - 5) = 4$, $c_2 = 2 \cdot 5 - 7 = 3$.
Also ist $x(t) = \frac{4}{t} + 3$.