....
Note

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
Σ		

I ....
Erstkorrektur

II ....
Zweitkorrektur

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang (Hauptfach)

Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Wiederholungsklausur
Mathematik für Physiker 3
(Analysis 2)

Prof. Dr. M. Wolf

27. September 2013, 15:00 – 16:30 Uhr

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **7** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: ein selbsterstelltes Din A4 Blatt

Erreichbare Gesamtpunktzahl: **80 Punkte**

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen.
Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

1. **Sternförmige Mengen sind zusammenhängend** **[10 Punkte]**

(a) Kreuzen Sie genau die wahren Aussagen an.
Für eine stetige Funktion gilt:

- ☐ Die Bilder zusammenhängender Mengen sind wieder zusammenhängend.
- ☐ Die Urbilder zusammenhängender Mengen sind wieder zusammenhängend.

(b) Geben Sie eine Charakterisierung für eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ an, die *nicht* zusammenhängend ist.

(c) Wie lautet die Definition einer sternförmigen Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$?

(d) Zeigen Sie, dass jede sternförmige Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ zusammenhängend ist.

2. **Differenzierbarkeit** **[10 Punkte]**

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq 0, \\ 0 & \text{für } (x,y) = 0. \end{cases}$$

(a) Wie lauten die partiellen Ableitungen im Ursprung?

$\partial_x f(0,0) =$	$\partial_y f(0,0) =$

(b) Wie lautet die Richtungsableitung in Richtung $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ im Ursprung?

$\partial_v f(0,0) =$

(c) Ist f differenzierbar im Ursprung?

☐ Ja ☐ Nein

(d) Zeigen Sie, dass $\partial_x f$ im Ursprung unstetig ist.

3. **Taylorentwicklung** **[10 Punkte]**

Sei $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$.

(a) Berechnen sie alle Terme der Taylorentwicklung von f bis zur dritten Ordnung im Entwicklungspunkt $(1, 1)$.
HINWEIS: Betrachten Sie $f(1 + u, 1 + v)$. Sie müssen keine Ableitungen berechnen.

(b) Geben Sie in möglichst einfacher Form die Funktion $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an, deren Graph die Tangentialebene an den Graphen von f im Punkt $(1, 1)$ ist.

$T(x, y) =$

4. **Gradientenfelder** **[14 Punkte]**

Das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^2\cos(xy^2) \\ 2xy\cos(xy^2) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestätigen Sie, dass $\operatorname{rot} F = 0$.

(b) Warum ist F ein Gradientenfeld?

(c) Welchen Wert hat das Kurvenintegral $\int\limits_\gamma F(r)\cdot dr$ für $\gamma(t) = (2\cos t, \sin t, -\cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$?

(d) Bestimmen Sie ein Potential V von F.

(e) Welchen Wert hat das Kurvenintegral $\int\limits_\gamma F(r)\cdot dr$ für $\gamma(t) = (\frac{\pi}{2}t, e^{t^2-1}, \arctan t)$, $t \in [-1, 1]$?

5. **Extrema mit Nebenbedingungen** **[14 Punkte]**

Ein Zylinder im $\mathbb{R}^3$ habe eine kreisförmige Grundfläche mit Radius $r > 0$ und die Höhe $h > 0$.

(a) Geben Sie die Gesamtoberfläche $f(r, h)$ und das Volumen $g(r, h)$ des Zylinders an.

(b) Bestimmen Sie bei vorgegebenem Zylindervolumen $V > 0$ mit Hilfe der Methode der Lagrangemultiplikatoren Radius r und Höhe h des Zylinders so, dass die Zylinderoberfläche extremal ist.

(c) Begründen Sie, warum die in (b) gefundene Lösung das eindeutige *absolute Minimum* für die Oberfläche des Zylinders bei gegebenem Volumen ist.

6. **Trennbare Differentialgleichungen** **[12 Punkte]**

Gegeben ist die Differentialgleichung $\dot{x} = f(t,x)$ mit $f(t,x) = (1-x^2)\cos t$.

(a) Welche der folgenden Eigenschaften ist hinreichend für die lokale Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen obiger Differentialgleichung?

- ☐ f ist stetig
- ☐ f ist erstes Integral
- ☐ f ist stetig differenzierbar
- ☐ f ist lipschitzstetig
- ☐ f ist lokal lipschitzstetig

(b) Welche der folgenden Eigenschaften besitzt die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$?

- ☐ f ist stetig
- ☐ f ist erstes Integral
- ☐ f ist stetig differenzierbar
- ☐ f ist lipschitzstetig
- ☐ f ist lokal lipschitzstetig

(c) Geben Sie alle auf ganz $\mathbb{R}$ definierten *konstanten* Lösungen der Differentialgleichung an.

(d) Bestimmen Sie ein erstes Integral $E(t,x)$ für die Differentialgleichung.
HINWEIS: Partialbruchzerlegung.

(e) Finden Sie eine Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung mit dem Anfangswert $x(0) = 0$.

7. **Variationsrechnung** **[10 Punkte]**

Gegeben ist das Funktional $F(x) = \int_1^2 t^2 \dot{x}(t)^2 dt$ für $x \in C^2([1,2])$ mit den Randbedingungen $x(1) = 7$, $x(2) = 5$.

(a) Wie lautet die Lagrange-Funktion $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zu diesem Problem?

$L(t, x, v) =$

(b) Wie lautet explizit die Euler-Lagrange-Gleichung von F für $x \in C^2([1,2])$?

(c) Geben Sie ein erstes Integral $E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ für die Euler-Lagrange-Gleichung des Funktionals F an.

$E(t, x, v) =$

(d) Finden Sie mit Hilfe der allgemeinen Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung, $x(t) = \frac{c_1}{t} + c_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, den stationären Punkt $x^*(t)$ von F.

$x^*(t) =$