TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. M. Wolf
Dr. M. Prähofer

Mathematik für Physiker 3 (Analysis 2)

Sommersemester 2013
Probeklausur
(25.06.2011)

`http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9203_2013S`

- Schreiben Sie bitte Name, Matrikelnummer und die Tutorgruppe für die Rückgabe auf jeden Bearbeitungsbogen.
- Nummerieren Sie die Lösungen der Aufgaben deutlich.
- Bei Kästchen- und Multiple-Choice-Aufgaben zählt nur das Ergebnis.

Aufgaben

1. Stetige Urbilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen

Sei X ein metrischer Raum.

(a) Charakterisieren Sie die Eigenschaft, dass $A \subseteq X$ eine abgeschlossene Menge ist mit Hilfe konvergenter Folgen.

(b) Sei Y ein weiterer metrischer Raum, $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung und $B \subseteq Y$ eine abgeschlossene Menge. Zeigen Sie, dass $f^{-1}(B)$ abgeschlossen ist.

2. Differenzierbarkeit

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq 0, \\ 0 & \text{für } (x,y) = 0. \end{cases}$$

(a) Wie lauten die partiellen Ableitungen $\partial_x f(0,0)$ und $\partial_y f(0,0)$?

(b) Wie lautet die Richtungsableitung $\partial_v f(0,0)$ in Richtung $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ im Ursprung?

(c) Ist f differenzierbar im Ursprung? Begründen Sie kurz.

(d) Zeigen Sie, dass f eine stetige Funktion ist.

3. Taylorentwicklung

Sei $f \in C^3(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ mit einem stationären Punkt bei $(0, \frac{\pi}{2})$ und $\partial_1{}^2 f(0, \frac{\pi}{2}) = 1$, $\partial_1\partial_2 f(0, \frac{\pi}{2}) = \partial_2{}^2 f(0, \frac{\pi}{2}) = -1$.

(a) Der Punkt $(0, \frac{\pi}{2})$ ist für f ein

☐ lokales Maximum ☐ Sattelpunkt ☐ lokales Minimum

(b) Sei nun $h(\phi) = f(\phi\cos\phi, \phi\sin\phi)$. Wie lautet die Taylorentwicklung von h im Punkt $\phi = \frac{\pi}{2}$ bis zur zweiten Ordnung?

$$\boxed{h(\phi) = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \mathcal{O}\big((\phi - \tfrac{\pi}{2})^3\big)}$$

(c) $\frac{\pi}{2}$ ist für h ein

☐ lokales Maximum ☐ Sattelpunkt ☐ lokales Minimum.

Bitte wenden

4. Kurvenintegral

Sei $F \in C(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ ein Kraftfeld und $\gamma \in C^2([t_0, t_1], \mathbb{R}^3)$, $t \mapsto \gamma(t)$, die Bahn eines Teilchens der Masse $m = 1$, welches sich gemäß des 2. Newtonschen Gesetzes $F(\gamma(t)) = m\,\ddot{\gamma}(t)$ im Zeitintervall $[t_0, t_1]$ von $\gamma(t_0) = (0, 0, 0)$ nach $\gamma(t_1) = (1, 1, 1)$ bewege und bei $\gamma(t_0)$ die Geschwindigkeit $\dot{\gamma}(t_0) = 0$ und bei $\gamma(t_1)$ den Geschwindigkeitsbetrag $\|\dot{\gamma}(t_1)\| = 2$ besitze. Berechnen sie die von F geleistete Arbeit, d.h., das Kurvenintegral von F entlang der Teilchenbahn γ.

5. Lokale Extrema

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(u, v) := u^3 + v^3 + u^2 + v^2,$$

und die folgenden Punkte in $\mathbb{R}^2$,

$$x_1 = (0, 0), \quad x_2 = (0, 2/3), \quad x_3 = (-2/3, 0), \quad x_4 = (-1, 0), \quad x_5 = (-2/3, -2/3).$$

Welche Aussagen sind richtig?

(a) f besitzt einen kritischen Punkt in	☐ x_1	☐ x_2	☐ x_3	☐ x_4	☐ x_5
(b) f besitzt eine lokales Maximum in	☐ x_1	☐ x_2	☐ x_3	☐ x_4	☐ x_5
(c) f besitzt eine lokales Minimum in	☐ x_1	☐ x_2	☐ x_3	☐ x_4	☐ x_5
(d) f besitzt einen Sattelpunkt in	☐ x_1	☐ x_2	☐ x_3	☐ x_4	☐ x_5

6. Implizit definierte Funktionen

Gegeben sind die Gleichungen

$$\begin{aligned} x + y + \sin z &= 0, \\ 3 \sin x - 2 \tan y - z &= 0. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass man dieses Gleichungssystem im Ursprung lokal gleichzeitig nach y und z auflösen kann und berechnen Sie die erste Ableitung der so implizit definierten Funktion $x \mapsto g(x)$ im Punkt $x = 0$.

(b) Die Lösungsmenge dieses Gleichungssystems werde im Ursprung lokal als Kurve im $\mathbb{R}^3$ durch x parametrisiert. Geben Sie mit Hilfe von (a) den Einheitstangentialvektor an diese Kurve im Ursprung an.

7. Lagrangemultiplikator

Es sei $P = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ ein regulärer Punkt von $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ mit $f(P) = 0$. Wir nehmen an, dass die Gleichungen $f_1(x, y, z) = 0$ lokal in P nach z aufgelöst werden kann, was die implizit definierte Funktion $\tilde{z}(x, y)$ ergibt.

(a) Wie lautet der Gradient von $\tilde{z}$ im Punkt (x_0, y_0)?

(b) Sei nun $h \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, so dass die in einer Umgebung von (x_0, y_0) definierte Funktion $\tilde{h}(x, y) = h(x, y, \tilde{z}(x, y))$ einen stationären Punkt in (x_0, y_0) hat. Zeigen Sie, dass dann $\nabla h(P) = \lambda \nabla f(P)$ gilt und bestimmen Sie $\lambda \in \mathbb{R}$.

Viel Erfolg!