Satz: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen & $x_0 \in U$ stationärer Punkt von $f \in C^2(U,\mathbb{R})$. Dann gilt:

(i) $H > 0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \ \forall x \in \left(B_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}\right): \ f(x) > f(x_0)$,

d.h. x_0 ist isoliertes lokales Minimum, wenn H pos. definit ist.

(ii) $\exists \varepsilon > 0 \ \forall x \in B_\varepsilon(x_0): f(x) \geq f(x_0) \Rightarrow H \geq 0$, d.h. wenn f bei x_0 ein lokales Minimum annimmt, dann ist H pos. semidefinit.

Beweis: (i) Es gilt $f(x_0+\Delta) - f(x_0) = \frac{1}{2} Q(\Delta) + R_2(\Delta)$ mit $\lim\limits_{\Delta \to 0} \frac{|R_2(\Delta)|}{\|\Delta\|^2} = 0$

z.z. $\frac{1}{2} Q(\Delta) + R_2(\Delta) > 0$ für $\Delta \neq 0$ mit hinreichend kleiner Norm.

Es gilt: $\frac{Q(\Delta)}{\|\Delta\|^2} = Q\left(\frac{\Delta}{\|\Delta\|}\right)$ wobei $\frac{\Delta}{\|\Delta\|} \in S^{n-1}$.

Da S^{n-1} kompakt ist, nimmt Q darauf ein Minimum an. Wegen $H > 0$ gibt es also ein $\mu > 0$, so dass $\frac{1}{2} \frac{Q(\Delta)}{\|\Delta\|^2} \geq \mu \quad \forall \Delta \neq 0$.

Wir wählen nun $\varepsilon > 0$, so dass $\|\Delta\| < \varepsilon \Rightarrow \frac{|R_2(\Delta)|}{\|\Delta\|^2} < \mu$. Dann gilt

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2} Q(\Delta) + R_2(\Delta)$$
$$\geq \mu \|\Delta\|^2 + R_2(\Delta) > 0 \qquad \checkmark$$

(ii) Wir nehmen an, dass $f(x) - f(x_0) \geq 0 \ \forall x$ mit $\|x - x_0\| < \varepsilon$.

Also $\frac{1}{2} Q\left(\frac{\Delta}{\|\Delta\|}\right) + \frac{R_2(\Delta)}{\|\Delta\|^2} \geq 0 \quad \forall \Delta$ mit $\|\Delta\| < \varepsilon$

Wegen $\lim\limits_{\Delta \to 0} \frac{R_2(\Delta)}{\|\Delta\|^2} = 0$ muss $Q\left(\frac{\Delta}{\|\Delta\|}\right) \geq 0 \ \forall \Delta$ & damit $H \geq 0$. $\square$

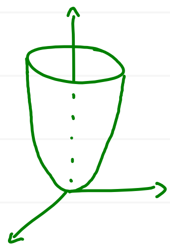
Bemerkungen:
- Durch Anwendung auf $-f$ gilt ein analoger Zusammenhang auch zw. neg. Definitheit & lokalen Maxima.
- $\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, f(x_0) + \langle x - x_0, \nabla f(x_0) \rangle + \frac{1}{2} \langle x - x_0, H(x-x_0) \rangle = y \right\}$

  beschreibt im Fall $H \neq 0$ eine „Quadrik", die sogenannte „Schmiegquadrik" an den Graphen von f in $(x_0, f(x_0))$.

∘ Mit Hilfe affiner Koordinatentransformationen läßt sich diese in eine Normalform bringen. Für die Hesse-Matrix entspricht dies der „Sylvester'schen Normalform": $\exists A \in GL(n,\mathbb{R}): AHA^T = \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 &&&& \\ &&& -1 &&& \\ &&&& \ddots && \\ &&&&& -1 & \\ &&&&&& 0 \\ &&&&&&& \ddots \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix}$

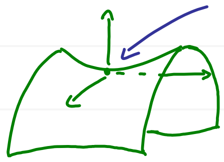
• Für $n=2$ ergeben sich im Fall $H \neq 0$ folgende Äquivalenzklassen:

(i) „elliptisches Paraboloid" $y = \pm\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$,
d.h. $H = \pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$



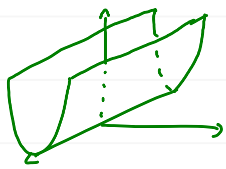
Dies sind die Normalformen für alle Fälle mit $H > 0$ oder $H < 0$.

(ii) „hyperbolisches Paraboloid" $y = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2)$
d.h. $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$



Dies ist Normalform für alle Fälle mit H indefinit $\wedge$ $\det(H) \neq 0$
$\overset{n=2}{\iff} \det(H) < 0$

(iii) „parabolischer Zylinder" $y = \pm\frac{x_1^2}{2}$, d.h. $H = \pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$



Dies sind Normalformen für alle Fälle mit $\det(H) = 0 \wedge H \neq 0$

<u>Lemma:</u> $H = H^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist genau dann pos. definit, wenn alle „Hauptabschnittsdeterminanten" pos. sind, d.h. $\forall k \in \{1,\dots,n\}$ gilt:

$$\det\begin{pmatrix} H_{11} & \cdots & H_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ H_{k1} & \cdots & H_{kk} \end{pmatrix} > 0$$

<u>Beweis:</u> Lin. Alg. oder Jänich II. □

Bsp.: „Affensattel" $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$

$$\partial_1 f(x,y) = 3x^2 - 3y^2 , \quad \partial_2 f(x,y) = -6xy$$

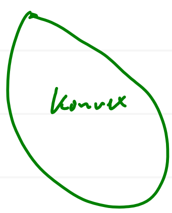
$$\Rightarrow H_f(x,y) = 6\begin{pmatrix} x & -y \\ -y & -x \end{pmatrix}$$

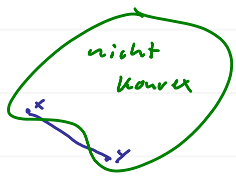
- $(x,y) = (0,0)$ ist stat. Punkt mit $H = 0$, d.h. der Graph ist dort „flach".
- Für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt $\det(H) = -36(x^2+y^2) < 0$, der Graph also „hyperbolisch".
- Es gibt weder lokale Minima noch Maxima.

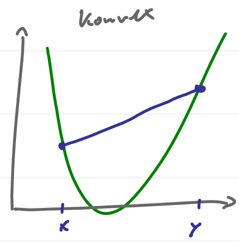
Rezept zum Auffinden von Extrema von $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

(1) potentielle Extrema sind:
- stationäre Punkte
- nicht diff.bare Punkte
- Randpunkte

(2) im Inneren gilt: wenn $\nabla f(x) = 0$ & $f \in C^2$, dann ist $H_f(x)$ semidefinit, wenn bei x ein Extremum vorliegt. Aus $H > 0$ ($H < 0$) folgt Min. (Max.).







Def./Erinnerung:
- $C \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt „konvex", wenn $\forall x,y \in C \ \forall \lambda \in (0,1)$:

$$\lambda x + (1-\lambda) y \in C$$

- Ist $C \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge und $f: C \to \mathbb{R}$, dann heißt f „konvex", wenn $\forall x,y \ \forall \lambda \in (0,1)$:

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \qquad (*)$$

- Eine konvexe Fkt. f heißt „strikt konvex", wenn aus Gleichheit in $(*)$ folgt, dass $x = y$ ist.

Satz: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein konvexes Gebiet und $f \in C^2(U, \mathbb{R})$. Dann gilt:

(i) $\forall x \in U: \; H_f(x) \geq 0 \iff f$ konvex auf U

(ii) $\forall x \in U: \; H_f(x) > 0 \implies f$ strikt konvex auf U.

($\Leftarrow$ gilt hier i.A. nicht. Gegenbsp.: $f(x) = x^4$)

Beweis: analog zum Fall $n=1$ aus dem 1. Sem. $\square$

Folgerungen:
- Ist f konvex, dann gilt: Lokales Min. $\Rightarrow$ globales Min.
- Ist f strikt konvex, dann gibt es höchstens ein Min.

Vorkommen in der freien Wildbahn (z.B. Thermodynamik):

Die Entropie $S(E, V, N)$ läßt sich als Funktion der extensiven Variablen E, V & N auffassen. Für ein homogenes, thermodynamisch stabiles System ist S konkav, d.h. $H_S(E, V, N) \leq 0$. Daraus folgt z.B.

$$0 \geq \frac{\partial^2 S}{\partial E^2} = -\frac{1}{T^2}\frac{1}{C_V},$$

wobei C_V die Wärmekapazität & T die Temperatur ist.

D.h. insbesondere $C_V \geq 0$.

II.3. Der Laplace-Operator

Def.: Für $f \in C^2(U, \mathbb{R})$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, definieren wir den „Laplace-Operator" $\Delta: f \mapsto \Delta f \in C(U, \mathbb{R})$ über

$$\Delta f(x) := \mathrm{tr}[H_f(x)] = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 f(x)$$

Bemerkung: Δ taucht im Raummantel vieler DGLen in der Physik auf, z.B.:

- „homogene Potentialgl." $\Delta \psi = 0$
  deren Lösungen heißen „harmonische Funktionen"
- „Wellengl.": $\Delta \psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi$
- „Wärmeleitungsgl.": $\Delta \psi = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \psi$

$\Big\}$ auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ mit $c > 0$ & $n \leq 3$.

Satz: Für bel. ONB $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ und $f \in C^2(U \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ gilt:

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \partial_{v_i}^2 f .$$

Beweis: $\partial_{v_i} \partial_{v_j} f(x) = \langle v_i, H_f(x) v_j \rangle$ und damit

$$\sum_{i=1}^{n} \partial_{v_i}^2 f(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle v_i, H_f(x) v_i \rangle \underset{\uparrow}{=} \mathrm{tr}[H_f(x)] = \Delta f(x) \qquad \square$$

Basisunabh. der Spur