Satz (von Schwarz zur Vertauschbarkeit der part. Abl.en):

Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^2(U, \mathbb{R}^m)$, dann gilt für alle $x_0 \in U$ und $i, j = 1, ..., n$

$$\partial_i \partial_j f(x_0) = \partial_j \partial_i f(x_0).$$

Beweis: (o.B.d.A. für $n=2$ & $x_0 = (0,0)$)

Definiere $F(x,y) := \dfrac{f(x,y) - f(x,0) - f(0,y) + f(0,0)}{xy}$ für $xy \neq 0$.

Nach dem MWS für $g(y) := \dfrac{f(x,y) - f(0,y)}{x}$ existiert ein η mit $|\eta| \leq |y|$, s.d.

$$F(x,y) = \frac{g(y) - g(0)}{y} = g'(\eta) = \frac{\partial_2 f(x,\eta) - \partial_2 f(0,\eta)}{x}.$$

Analog gibt es ein ξ mit $|\xi| \leq |x|$, s.d.

$$F(x,y) = \partial_1 \partial_2 f(\xi, \eta)$$

Auf die gleiche Weise finden wir $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}$ mit $|\tilde{\xi}| \leq |x|$, $|\tilde{\eta}| \leq |y|$, s.d.

$$F(x,y) = \partial_2 \partial_1 f(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$$

Da für bel. Folgen von $(x_n, y_n) \to 0$ gilt $(\xi_n, \eta_n) \to 0$ & $(\tilde{\xi}_n, \tilde{\eta}_n) \to 0$, ist wegen der Stetigkeit von $\partial_1 \partial_2 f$ & $\partial_2 \partial_1 f$:

$$\partial_1 \partial_2 f(0,0) = \lim_{n \to \infty} \partial_1 \partial_2 f(\xi_n, \eta_n) = \lim_{n \to \infty} \partial_2 \partial_1 f(\tilde{\xi}_n, \tilde{\eta}_n) = \partial_2 \partial_1 f(0,0).$$

$\square$

II.7. Taylorapproximation

Satz: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^{p+1}(U, \mathbb{R})$ und $a, x \in U$, so dass die Verbindungsgerade zw. a & x ebenfalls in U liegt. Dann gibt es ein ξ auf dieser –"–, so dass:

$$f(x) = \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k \right)}_{=: T_p f(x;a)} + \underbrace{\frac{1}{(p+1)!} f^{(p+1)}(\xi)(x-a)^{p+1}}_{=: R_p(x;a) \text{ Restglied}}$$

Bemerkungen:

- $T_p f(x;a)$ heißt „Taylorpolynom" der Ordnung p von f bei a.
- $$f^{(k)}(a)\Delta^k := f^{(k)}(a)\underbrace{(\Delta)(\Delta)\ldots(\Delta)}_{k\text{-mal}}$$
  $$= \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} \partial_{i_k} \cdots \partial_{i_1} f(a) \Delta_{i_k} \cdots \Delta_{i_1}$$

Beweis: Betrachte $F: [0,1] \to \mathbb{R}$, $F(t) := f(a + t\Delta)$ wobei: $\Delta := x - a$.

Dann ist $F(0) = f(a)$, $F(1) = f(x)$ und $F \in C^{p+1}([0,1], \mathbb{R})$, d.h. wir können die Taylorformel aus dem 1. Semester verwenden & es gilt

$$F(1) = \sum_{k=0}^{p} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} + \frac{1}{(p+1)!} F^{(p+1)}(\tau) \quad \text{für geeignetes } \tau \in [0,1].$$

$F^{(k)}(t)$ erhalten wir mit Hilfe der Kettenregel:

$$F^{(1)}(t) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(a + t\Delta)\Delta_i$$

$$F^{(2)}(t) = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \partial_{i_1}\partial_{i_2} f(a + t\Delta)\Delta_{i_1}\Delta_{i_2}$$

$$\vdots$$

$$F^{(p)}(t) = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_p=1}^{n} \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_p} f(a+t\Delta)\Delta_{i_1} \cdots \Delta_{i_p}$$

$$= f^{(p)}(a + t\Delta)\Delta^p$$

Mit $\xi := a + \tau\Delta$ folgt die Aussage. $\square$

Korollar: (Qualitative Taylorformel)

Unter den Voraussetzungen des vorigen Satzes gilt:

$$R_p(x;a) = O(\|x-a\|^{p+1}) \quad \text{für } x \to a \text{, d.h.}$$

$$\limsup_{x \to a} \frac{|R_p(x;a)|}{\|x-a\|^{p+1}} < \infty .$$

(d.h. das Restglied geht für $x \to a$ wenigstens so schnell wie $\|x-a\|^{p+1}$ gegen Null.)

Beweis:
$$|R_p(x;a)| = \frac{1}{(p+1)!} \left| f^{(p+1)}(\xi)(x-a)^{p+1} \right|$$

$$\leq \frac{\|f^{(p+1)}(\xi)\|}{(p+1)!} \|x-a\|^{p+1} \quad \text{wobei}$$

$$\|f^{(p+1)}(\xi)\| := \sup_{\{\Delta^{(i)} \in \mathbb{R}^n\}} \left\{ \frac{|f^{(p+1)}(\xi)(\Delta^{(1)}) \dots (\Delta^{(p+1)})|}{\prod_{i=1}^{p+1} \|\Delta^{(i)}\|} \right\} < \infty \quad \text{wegen}$$

Beschränktheit der Ableitung. Dies hängt stetig von ξ ab. Damit ist

$$c_x := \sup_{\xi \in [x;a]} \|f^{(p+1)}(\xi)\| < \infty$$ monoton fallend für $x \to a$. Wegen

$$|R_p(x;a)| \leq \frac{c_x}{(p+1)!} \|x-a\|^{p+1}$$ folgt die Behauptung. $\square$

Bemerkung: Gilt lediglich $f \in C^p(U,\mathbb{R})$, dann läßt sich analog zeigen, dass

$$R_p(x;a) = o(\|x-a\|^p) \text{, d.h. } \lim_{\Delta \to 0} \frac{|R_p(x;a)|}{\|x-a\|^p} = 0 .$$ (→ Königsberger)

Def.: Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \to \mathbb{R}$, dann heißt f in U „reell analytisch", wenn es zu jedem $a \in U$ eine Umgebung V gibt, so dass $\forall x \in V$ gilt

$$\lim_{p \to \infty} T_p f(x;a) = f(x) .$$

Bemerkung: Die Region in $\mathbb{R}^n$ in der die Taylorreihe gegen f konvergiert muß weder ein Quader noch eine Kugel sein. Z.B. ist

$$\frac{1}{1-x_1-x_2} = \sum_{k=0}^{\infty} (x_1+x_2)^k$$ die Taylorreihe um $(0,0)$, welche genau für

$|x_1+x_2| < 1$ konvergiert.

II.8. Hesse-Matrix & lokale Extrema

Def.: Sei $f \in C^2(U \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und $x \in U$.
$H := H_f(x) := \left(\partial_i \partial_j f(x)\right)_{i,j=1\dots n}$ heißt „Hesse Matrix" von f bei x.

Bemerkungen:
- Für $f \in C^3(U \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ liefert die Taylorentw. bis zur 2^{ten} Ordnung:

$$f(x+\Delta) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(x)\, \Delta_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \partial_i \partial_j f(x)\, \Delta_i \Delta_j + R_2(\Delta)$$
$$= f(x) + \langle \nabla f(x), \Delta \rangle + \frac{1}{2} \langle \Delta, H\Delta \rangle + R_2(\Delta)$$

- $f \in C^2$ garantiert nach dem Satz von Schwarz, dass $H = H^T$.

Lemma: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \to \mathbb{R}$ partiell diff.bar. Wenn f bei x_0 ein lokales Extremum annimmt, gilt notwendigerweise $\nabla f(x_0) = 0$, d.h. x_0 ist ein sog. „stationärer Punkt".

Beweis: $g(t) := f(x_0 + t e_i)$ hat bei $t=0$ ein lokales Extremum. Also ist

$0 = g'(0) = \langle \nabla f(x_0), e_i \rangle$. □

Erinnerung: Eine sym. Matrix $H = H^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ & die zugehörige Quadratische Form $Q(v) := \langle v, Hv \rangle$ heißen

- „positiv definit" $H > 0 \iff \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus 0: Q(v) > 0$
  $\iff$ die Eigenwerte erfüllen $\lambda_i > 0 \;\forall i = 1\dots n$
- „positiv semidefinit" $H \geq 0 \iff \forall v \in \mathbb{R}^n: Q(v) \geq 0$
  $\iff \lambda_i \geq 0 \;\forall i = 1, \dots, n$
- analog definiert sind negativ (semi) definit
- „definit" := positiv oder negativ definit
- „indefinit" := nicht definit