I.7. Banachscher Fixpunktsatz

Def.: Eine Abb. $f: X \to Y$ zw. zwei metrischen Räumen heißt „Kontraktion", wenn sie Lipschitz-stetig ist mit Konstante $L < 1$. D.h.

$$\exists L < 1 \; \forall x, x' \in X \quad d_Y(f(x), f(x')) \leq L \, d_X(x, x').$$

Bem.:
- $\forall x, x' \in X: d_Y(f(x), f(x')) < d_X(x, x')$ ist schwächer!
- „Kontraktion" ist in der Literatur nicht einheitlich definiert.

Satz: (Banach'scher Fixpunktsatz) Sei (M, d) mit $M \neq \emptyset$ ein vollständiger metrischer Raum und $f: M \to M$ eine Kontraktion mit Lipschitzkonst. $L < 1$. Dann gilt:

(i) f hat genau einen „Fixpunkt", d.h. ein $x = f(x)$.

(ii) Für jedes $x_0 \in M$ und jede Folge, die durch $\underbrace{x_{n+1} := f(x_n)}_{\text{„Picard-Iteration"}}$ definiert ist gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad d(x_n, x) \overset{a}{\leq} \frac{L}{1-L} d(x_n, x_{n-1}) \overset{b}{\leq} \frac{L^n}{1-L} d(x_1, x_0)$$

Beweis: $\forall n, k \in \mathbb{N}: \quad d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n))$

$$\leq L \, d(x_{n-1}, x_n) \leq L^n d(x_0, x_1) \quad \Rightarrow b$$

Außerdem gilt: $$d(x_n, x_{n+k}) \underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \sum_{j=0}^{k-1} d(x_{n+j}, x_{n+j+1})$$

$$\overset{\text{analog zu } b}{\leq} \sum_{j=0}^{k-1} L^{j+1} d(x_{n-1}, x_n) \overset{\text{geom. Reihe}}{\leq} \frac{L}{1-L} d(x_{n-1}, x_n)$$

$$\overset{b}{\leq} \frac{L^n}{1-L} d(x_0, x_1)$$

Da $L < 1$, ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ damit Cauchy-Folge & konvergiert $x_n \to x$ wegen Vollständigkeit von M.

Existenz eines Fixpunktes:

Wegen Stetigkeit von f gilt $f(x) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$

$$= \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x \text{ , also } f(x) = x .$$

Eindeutigkeit:

Angenommen es gäbe einen weiteren Fixpunkt $x' = f(x')$, dann wäre

$$d(x,x') = d(f(x), f(x')) \leq L\, d(x,x') < d(x,x') \text{ es sei denn } d(x,x') = 0$$

und damit $x = x'$.

(a) folgt nun aus $d(x_n, x_{n+k}) \leq \frac{L}{1-L} d(x_{n-1}, x_n)$ (was oben bewiesen wurde) im Limes $k \to \infty$.

$\square$

Gegenbeispiele:

- $M = (0,1)$, $f: x \mapsto \frac{x}{2}$ hat keinen Fixpunkt.

  (M ist nicht vollständig)

- $M = \mathbb{R}$, $f: x \mapsto \frac{\pi}{2} + x - \arctan x$

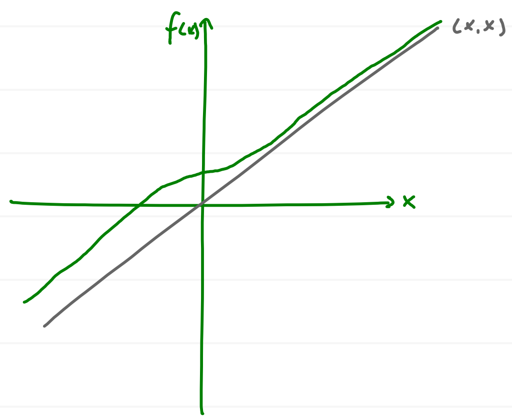
  $$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2}$$

  Mittelwertsatz: $|f(x) - f(y)| = f'(z)\,|x-y|$ für geeignetes $z \in [x,y]$

  $$< |x-y|$$

  Es gibt jedoch kein $L<1$ für das $|f(x) - f(y)| \leq L\,|x-y|$

  f hat keinen Fixpunkt!



II. Differentialrechnung

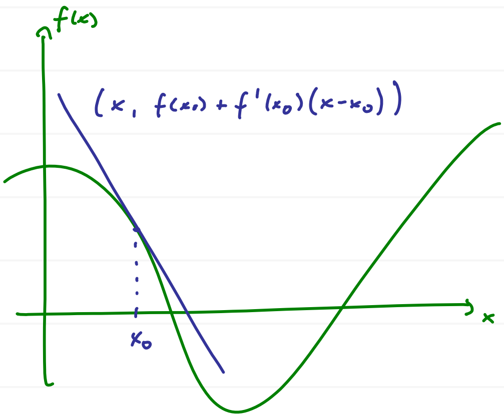
II.1. Ableitung als Lineare Näherung

Erinnerung: $f: (a,b) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist diff.bar bei $x_0 \in (a,b)$ mit Ableitung $f'(x_0)$,

wenn $f(x_0+\Delta) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta + o(\Delta)$ für $\Delta \to 0$

wobei $g(\Delta) = o(\Delta)$ für $\Delta \to 0$ bedeutet, dass

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{g(\Delta)}{|\Delta|} = 0$$



Def.: Die Menge der (bzgl. der Operatornorm) beschränkten linearen Abb. $f: X \to Y$ zw. zwei Banachräumen X & Y bezeichnen wir mit $\mathcal{B}(X,Y)$.

Def.: Seien X, Y Banachräume, $U \subseteq X$ offen und $f: U \to Y$.

- Eine beschränkte lineare Abb. $f'(x_0) \in \mathcal{B}(X,Y)$ heißt „Ableitung von f bei $x_0 \in U$", wenn gilt

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{\| f(x_0+\Delta) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta \|}{\|\Delta\|} = 0$$

- Die Matrix, die $f'(x_0)$ für endl.dim X, Y repräsentiert, heißt „Jacobimatrix".
- $f'(x_0)$ heißt auch „(totales) Differential" oder „Fréchet Ableitung".
- Existiert die Ableitung $f'(x_0)$, so heißt f bei x_0 „differenzierbar".
- Existiert $f'(x_0)$ für alle $x_0 \in U$, dann ist $f': U \to \mathcal{B}(X,Y)$, $x_0 \mapsto f'(x_0)$ die „Ableitung" von f.

Bemerkungen:

- Wir werden meist $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$ betrachten. In dem Fall sind lineare Abb.en automatisch beschränkt.
- $\lim\limits_{\Delta \to 0} g(\Delta)$ ist als „stetige Fortsetzung" von g in 0 zu verstehen, d.h. als Grenzwert sämtlicher Folgen $y_n \to 0$ von $g(y_n)$
- Für $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wird aus dem üblichen "$f'(x_0) \in \mathbb{R}$" durch $x \mapsto f'(x_0)x$ eine lineare Abb. $f'(x_0): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
- Wenn die Ableitung existiert, ist sie eindeutig, da

$$0 \overset{!}{=} \lim_{\Delta \to 0} \left\| (\tilde{f}'(x_0) - f'(x_0)) \frac{\Delta}{\|\Delta\|} \right\| \Rightarrow \tilde{f}'(x_0) = f'(x_0)$$

Beachte: dies verwendet, dass f in einer Umgebung von x_0 def. ist.

Satz: (Diff.barkeit impliziert Stetigkeit) Ist $U \subseteq X$ offen und $f: U \to Y$ diff.bar bei x_0, so ist f bei x_0 auch stetig.

Beweis: Betrachte eine Folge $x_n \in U$ mit $x_n \to x \in U$. Es gilt:

$$f(x_n) = f(x) + f'(x)(x_n - x) + o(\|x_n - x\|), \text{ also}$$

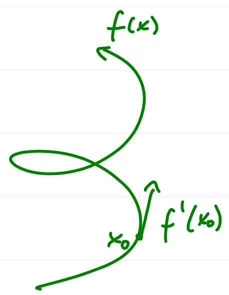
$$\begin{aligned} \|f(x_n) - f(x)\| &\leq \|f'(x)(x_n - x)\| + o(\|x_n - x\|) \\ &\leq \|f'(x)\| \, \|x_n - x\| + o(\|x_n - x\|) \to 0 \text{ für } n \to \infty \quad \square \end{aligned}$$

Bsp.:

- Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $v \in \mathbb{R}^n$ und $f: \mathbb{R}^m \ni x \mapsto Ax + v \in \mathbb{R}^n$, dann gilt $f'(x_0) = A \ \forall x_0$, denn

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta) &= Ax_0 + A\Delta + v \\ &= f(x_0) + A\Delta. \end{aligned}$$

- Für $f: X \to Y_1 \times \dots \times Y_n : x \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x))$ ist $f'(x_0) = (f_1'(x_0), \dots, f_n'(x_0))$ z.B. für $f: \mathbb{R} \ni x \mapsto \begin{pmatrix} r\cos x \\ r \sin x \\ h x \end{pmatrix}$, $h, r \in \mathbb{R}$ ist $f'(x_0) = \begin{pmatrix} -r \sin x_0 \\ r \cos x_0 \\ h \end{pmatrix}$



Tangentialvektor an die Schraubenlinie.

- Ist $f: \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $f(A) := A^2$, dann gilt: $f'(A): B \mapsto AB + BA$

(d.h. für $n=1$ $f'(x): b \mapsto 2xb$)

Beweis: $f(A+\Delta) - f(A) - f'(A)\Delta$

$= (A+\Delta)^2 - A^2 - A\Delta - \Delta A = \Delta^2$

D.h. $\lim\limits_{\Delta\to 0} \frac{\|\cdots\|}{\|\Delta\|} = \lim\limits_{\Delta\to 0} \frac{\|\Delta^2\|}{\|\Delta\|} \leq \lim\limits_{\Delta \to 0} \|\Delta\| = 0$ $\square$

Für die Operatornorm gilt $\|\Delta^2\| \leq \|\Delta\|^2$

Lemma: Sind $\Delta_i : X \to X$, $i \in \{1,2\}$ lineare Abbildungen, dann gilt $\|\Delta_1 \Delta_2\| \leq \|\Delta_1\| \|\Delta_2\|$ für die Operatornorm.

Beweis: $\|\Delta_1\Delta_2\| = \sup\limits_{x\neq 0} \frac{\|\Delta_1\Delta_2 x\|}{\|x\|} \underset{y:=\Delta_2 x}{=} \sup\limits_{x\neq 0} \frac{\|\Delta_1 y\|}{\|y\|} \frac{\|\Delta_2 x\|}{\|x\|}$

$\leq \sup\limits_{x\neq 0} \frac{\|\Delta_2 x\|}{\|x\|} \sup\limits_{y\neq 0} \frac{\|\Delta_1 y\|}{\|y\|}$

$= \|\Delta_1\| \cdot \|\Delta_2\|$ $\square$