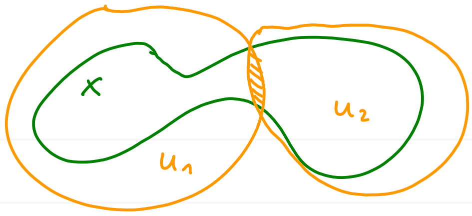


## I.5. Zusammenhang

**Def.:** Sei $(X,d)$ ein metrischer Raum.

- $X$ heißt „<u>zusammenhängend</u>", wenn für bel. nicht-leere, offene $U_i \subseteq X$ gilt: $X = U_1 \cup U_2 \Rightarrow U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$.
- $X$ heißt „<u>wegzusammenhängend</u>", wenn $\forall x,y \in X \; \exists \gamma \in C([0,1],X)$: $\gamma(0) = x \wedge \gamma(1) = y$.


**Bem.:** • dies läßt sich auch auf Teilmengen $Y \subseteq X$ anwenden, da $(Y,d)$ wieder ein metr. Raum ist, wenn wir $d$ auf $Y \times Y$ eingeschränkt betrachten. Für $(Y,d)$ gilt dann:

$V \subseteq Y$ ist offen in $(Y,d)$ $\Leftrightarrow$ es gibt eine in $X$ offene Menge $U$ mit $U \cap Y = V$.

**Def.:** Eine zusammenhängende, offene Menge nennen wir „<u>Gebiet</u>".

**Satz:** (<u>Zusammenhang vs. Wegzusammenhang</u>)

(i) Es gilt stets:

$X$ wegzusammenhängend $\Rightarrow$ $X$ zusammenhängend.

(ii) Ist $X$ offene Teilmenge eines normierten Vektorraums, so gilt auch die Umkehrung.

**Beweis:** $\rightarrow$ z.B. Walter Analysis 2 oder Königsberger 2 $\square$

**Satz:** Ist $f: X \to Y$ stetig und $X$ zusammenhängend, dann ist auch $f(X)$ zusammenhängend.

**Beweis:** Angenommen $f(X) = U_1 \cup U_2$ mit $U_i$ offen, nichtleer & disjunkt.
Dann wäre $X = f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(U_2)$ ebenfalls nicht zusammenhängend. $\square$

**Bsp.:** • Die orthogonale Gruppe $O(n) := \{ A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^T A = \mathbb{1} \}$ ist nicht zusammenhängend.

**Beweis:** $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ ist stetig, da nach Leibniz-Regel $\det(A)$ = Polynom. Wäre $O(n)$ zusammenhängend, müßte $\det(O(n)) \subseteq \mathbb{R}$ dies auch sein. Es gilt jedoch wegen $1 = \det(\mathbb{1}) = \det(A^T A) = \det(A^T)\det(A)$
$= \det(A)^2$,
dass $A \in O(n) \Rightarrow \det(A) = \pm 1$ und wegen $\mathbb{1}, \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in O(n)$;
$\det(O(n)) = \{-1, 1\}$.

• Die „eigentliche Lorentz-Gruppe" $SO(3,1) := \{ \Lambda \in \mathbb{R}^{4\times 4} \mid \Lambda g \Lambda^T = g \wedge \det(\Lambda) = 1 \}$ mit $g := \begin{pmatrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ ist weder kompakt noch zusammenhängend.

**Beweis:** aus $\Lambda g \Lambda^T = g$ folgt für die Komponenten $\Lambda_{ij}$, $i,j = 0,\dots,3$:
$$\Lambda_{00}^2 = 1 + \sum_{k=1}^{3} (\Lambda_{k0})^2 \quad \text{also} \quad \Lambda_{00}^2 \geq 1.$$
Da $SO(3,1) \ni \Lambda \mapsto \Lambda_{00}$ stetig ist & es in $SO(3,1)$ sowohl Elemente mit $\Lambda_{00} \leq -1$ als auch mit $\Lambda_{00} \geq 1$ gibt, kann $SO(3,1)$ nicht zusammenhängen.

(Die „orthochrone eigentliche Lorentzgruppe" $SO(3,1)^+ := SO(3,1) \cap \{ \Lambda \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \Lambda_{00} \geq 1 \}$ ist eine der beiden „Zusammenhangskomponenten" von $SO(3,1) = SO(3,1)^+ \cup SO(3,1)^-$)

Da $SO(3,1)^+$ „Lorentz-Boosts" der Form $\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & & \\ \beta\gamma & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ mit $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$ & $\beta = \frac{v}{c} \in [0,1)$ enthält & damit unbeschränkt ist, sind $SO(3,1)^+$ & $SO(3,1)$ nicht kompakt.

**Korollar:** (Zwischenwertsatz) Sei $(M,d)$ ein zusammenhängender metrischer Raum, $f : M \to \mathbb{R}$ stetig & $x, y \in M$. Dann gilt:
$$f(x) < c < f(y) \Rightarrow \exists z \in M : f(z) = c.$$

**Beweis:** Da $M$ zusammenhängend & $f$ stetig ist, ist auch $f(M) \subseteq \mathbb{R}$ zusammenhängend, also ein Intervall. Mit $f(x) < c < f(y)$ folgt dann $c \in f(M)$, d.h. $\exists z \in M : f(z) = c$. ◻

## I.6. Endlichdimensionale Banachräume

**Satz:** Sei $X$ ein endlich-dim. $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\|\cdot\|$ & $\|\cdot\|'$ ein Paar von Normen darauf. Dann gilt

$$\exists c, c' \in (0,\infty) \quad \forall x \in X: \quad c\|x\|' \leq \|x\| \leq c'\|x\|'$$

**Bem.:** Die Normen heißen dann „äquivalent".

**Beweis:**
- $X$ kann, z.B. durch die Wahl einer Basis, mit dem $\mathbb{R}^n$ identifiziert werden.
- Da Äquivalenz von Normen transitiv ist, genügt es dies für $\|x\|' = \|x\|_2 := \left(\sum |x_i|^2\right)^{1/2}$ z.z.
- $$\|x\| = \Big\|\sum_{i=1}^n x_i \underset{\underset{\|\cdot\|_2\text{-ONB}}{\uparrow}}{e_i}\Big\| \underset{\underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\uparrow}}{\leq} \sum_{i=1}^n |x_i|\,\|e_i\| \underset{\underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\uparrow}}{\leq} \|x\|_2 \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|^2\right)^{1/2}}_{=:c'}$$
- $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto \|x\|$ ist stetig bzgl. $\|\cdot\|_2$, da
$$|f(x) - f(y)| = \big|\|x\| - \|y\|\big| \underset{\underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\uparrow}}{\leq} \|x-y\| \leq c'\|x-y\|_2$$

  $f|_{S^{n-1}}$ ist stetig auf der kompakten Menge $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$.

  Damit existiert $\min f(S^{n-1}) =: c \in (0,\infty)$ und es gilt $\forall x \neq 0$:
$$\left\|\frac{x}{\|x\|_2}\right\| \geq c, \text{ da } \frac{x}{\|x\|_2} \in S^{n-1} \text{ für } x \neq 0.$$

  Demnach ist $\quad \|x\| \geq c\|x\|_2 \quad \forall x \in X$ $\square$

**Korollar:** Die Eigenschaften Konvergenz, Abgeschlossenheit, Offenheit, Kompaktheit und Stetigkeit hängen in endlich-dim. normierten $\mathbb{R}$-Vektorräumen nicht von der Wahl der Norm ab.

**Lemma:** Für jede Folge $x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^N$ gilt mit $\|x\|_\infty := \max\{|x_i|\}_{i=1}^N$:

(i) $(x_n)$ ist Cauchy-Folge bzgl. $\|\cdot\|_\infty$

$\Updownarrow$

(ii) $(x_n)_i$ ist Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ für alle $i = 1, \dots, N$.

**Beweis:** (i) bedeutet $\forall \varepsilon > 0 \; \exists M \in \mathbb{N} \; \forall n, m \geq M: \; \|x_n - x_m\|_\infty < \varepsilon$.

Dann folgt (ii) aus $|x_{n,i} - x_{m,i}| \leq \|x_n - x_m\|_\infty$.

Um umgekehrt (ii) $\Rightarrow$ (i) z.z. wählen wir einfach $M = \max\{M_i\}_{i=1}^N$ ... $\square$

**Satz:** Jeder normierte endlich-dim. $\mathbb{R}$-Vektorraum ist vollständig (sprich ein „Banachraum").

**Beweis:** $(x_n)$ ist Cauchy bzgl. $\|\cdot\|$

$\Rightarrow$ $(x_n)$ ist Cauchy bzgl. $\|\cdot\|_\infty$

$\Rightarrow$ $(x_n)_i$ –"– in $\mathbb{R}$ für alle $i$

$\Rightarrow$ $(x_n)_i$ konvergiert –"– , da $\mathbb{R}$ vollständig ist,

$\Rightarrow$ $(x_n)$ konvergiert bzgl. $\|\cdot\|_\infty$

$\Rightarrow$ $(x_n)$ konvergiert bzgl. $\|\cdot\|$ $\square$